

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Наумова Наталия Александровна  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 25.11.2025 09:47:28  
Уникальный программный ключ:  
6b5279da4e034bffa679172803da5b7b559fc69e2

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»**  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Физико-математический факультет  
Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

Согласовано  
деканом физико-математического факультета  
«28» февраля 2024 г.

\_\_\_\_\_  
/Кулешова Ю.Д./

**Рабочая программа дисциплины**

Математический анализ

**Направление подготовки**

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

**Профиль:**

Математика и физика

**Квалификация**

Бакалавр

**Формы обучения**

Очная, очно-заочная

Согласовано учебно-методической комиссией  
физико-математического факультета  
Протокол «28» февраля 2024 г. № 6  
Председатель УМКом

\_\_\_\_\_  
/Кулешова Ю.Д./

Рекомендовано кафедрой высшей  
алгебры, математического анализа и  
геометрии  
Протокол от «14» февраля 2024 г. № 6  
Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_  
/Кондратьева Г.В./

Мытищи  
2024

Автор-составители:

Зверев Н.В., доцент кафедры высшей алгебры, математического анализа  
и геометрии, кандидат физико-математических наук, доцент

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ России от 22.02.2018 г. № 125.

Дисциплина входит в обязательную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)», и является обязательной для изучения.

Год начала подготовки (по учебному плану) 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Планируемые результаты обучения.....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Объем и содержание дисциплины.....	4
4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся.....	13
5. Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации по дисциплине .....	17
6. Учебно-методическое и ресурсное обеспечение дисциплины .....	35
7. Методические указания по освоению дисциплины.....	37
8. Информационные технологии для осуществления образовательного процесса по дисциплине .....	37
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	38

# **1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ**

## **1.1. Цель и задачи дисциплины**

### **Цель освоения дисциплины:**

Овладение основными понятиями, методами курса математического анализа, принципами построения этого курса, выяснение его места и роли в системе математических наук, приложениях в других науках, в школьном курсе математики.

### **Задачи дисциплины:**

1. Сформировать представления об основных понятиях математического анализа и их свойствах;
2. Выработать умения и навыки вычисления пределов, нахождения производных и интегралов, доказательства свойств и теорем, относящихся к основным понятиям математического анализа;
3. Научить применять методы математического анализа для решения задач, нахождения геометрических и физических величин;
4. Познакомить с современными направлениями развития математического анализа и его приложениями;
5. Дать научное обоснование школьного курса «Алгебра и начала анализа»;
6. Способствовать развитию творческого потенциала обучающегося в процессе освоения данного курса, активизации самостоятельной деятельности, включению в исследовательскую работу;
7. Сформировать готовность обучающегося к реализации полученных знаний и умений в практической деятельности.

## **1.2. Планируемые результаты обучения**

В результате освоения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции:

ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.

ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.

# **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)», и является обязательной для изучения.

Программа дисциплины «Математический анализ» построена таким образом, что её основные понятия и методы в практическом плане дополняют программы курсов «Алгебра», «Теория чисел», «Геометрия», «Элементарная математика».

Данная дисциплина является основой для изучения дисциплин «Дифференциальные

уравнения», «Избранные вопросы высшей математики», «Теория функций действительного и комплексного переменного».

### 3. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Объем дисциплины

Показатель объема дисциплины	Кол-во часов	
	Очная форма обучения	Очно-заочная форма обучения
Объем дисциплины в зачетных единицах	14	14
Объем дисциплины в часах	504	504
Контактная работа:	259,1	161,9
Лекции	108	66
Практические занятия	144	88
Контактные часы на промежуточную аттестацию:	7,1	7,7
Зачет	0,2	0,2
Предэкзаменационная консультация	6	6
Экзамен	0,9	0,9
Контрольная работа	-	0,8
Самостоятельная работа	208	290
Контроль	36,9	52,1

Форма промежуточной аттестации: экзамен в 1, 3 и 4 семестрах и зачет во 2 семестре на очной, очно-заочной формах обучения.

#### 3.2. Содержание дисциплины

Очная форма обучения

Наименование разделов (тем) Дисциплины	Кол-во часов	
	Лекции	Практические занятия
<b>Семестр 1</b>		
<b>Тема 1. Предварительные сведения о математическом анализе. Действительные числа.</b> Предмет математического анализа. Краткие исторические сведения. Структура курса математического анализа. Понятия множества и отображения. Рациональные и иррациональные числа. Свойство упорядоченности. Действительные числа как бесконечные десятичные	4	4

<p>дроби. Рациональные числа как периодические десятичные дроби. Понятие об аксиоматическом построении множества действительных чисел. Изображение действительных чисел на прямой. Примеры числовых множеств. Абсолютная величина числа. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Максимумы и минимумы числовых множеств. Точные грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней.</p>		
<p><b>Тема 2. Понятия функции и последовательности. Предел последовательности.</b>  Понятие действительной функции действительной переменной. Ограниченность, монотонность функций. Обратная и сложная функции. Понятия числовой последовательности и подпоследовательности. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Простейшие свойства предела последовательности. Свойства сходящейся последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной последовательности. Число <math>\varepsilon</math> как предел последовательности <math>(1+1/n)^n</math>. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.</p>	6	8
<p><b>Тема 3. Предел функции.</b>  Определения предела функции в точке по Гейне и по Коши и эквивалентность этих определений. Свойства пределов функций и свойства функций, имеющих предел. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности. Теорема о пределе сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Функции одного порядка и бесконечно малые функции (отношения «О» и «о»). Эквивалентные функции, таблица эквивалентности основных элементарных функций.</p>	6	8
<p><b>Тема 4. Непрерывность функции.</b>  Непрерывность функции в точке. Основные свойства непрерывных функций. Операции над непрерывными функциями. Предельный переход под знаком непрерывной функции. Ограниченность непрерывных на отрезке функций. Достижение экстремальных значений. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Точки разрыва функции и их классификация.</p>	6	6
<p><b>Тема 5. Производная и дифференциал.</b>  Производная и её физический и геометрический смыслы. Касательная к графику функции. Дифференцируемые функции. Дифференциал и его геометрический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, произведения и частного. Дифференцирование сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Логарифмическая производная функции. Неявно заданные функции и их дифференцирование. Параметрическое задание функций и их дифференцирование. Производные и дифференциалы высших порядков.</p>	6	8
<p><b>Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления.</b>  Локальные экстремумы функции. Лемма Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Применения теоремы Лагранжа. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей с помощью производных. Формула Тейлора с остаточным слагаемым в форме Пеано и в форме Лагранжа. Формула Маклорена. Бином Ньютона. Формула Лейбница производной высших порядков</p>	4	8

произведения функций.		
<b>Тема 7. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков.</b> Признаки монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума функции. Задачи о наибольших и наименьших значениях функции. Направление выпуклости кривой и точки перегиба. Горизонтальная, вертикальная и наклонные асимптоты. Исследование функции и построение графика.	4	12
<b>Итого в семестре 1</b>	<b>36</b>	<b>54</b>
<b>Семестр 2</b>		
<b>Тема 8. Определение и свойства неопределённого интеграла.</b> Первообразная функции и неопределённый интеграл. Линейность и противоположность дифференцированию неопределённого интеграла. Таблица основных неопределённых интегралов.	2	2
<b>Тема 9. Основные методы интегрирования.</b> Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям.	4	4
<b>Тема 10. Интегрирование дробно-рациональных функций.</b> Неопределённые интегралы от простейших рациональных дробей. Сведение к интегралам от простейших рациональных дробей. Метод неопределённых коэффициентов и метод «вычёркиваний».	4	4
<b>Тема 11. Интегрирование тригонометрических функций.</b> Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование симметричных рациональных тригонометрических функций, тригонометрических биномов и произведений тригонометрических функций.	4	4
<b>Тема 12. Интегрирование иррациональных функций.</b> Интегрирование квадратичных и дробно-линейных иррациональностей. Дробно-линейная подстановка. Интегрирование дифференциальных биномов.	4	4
<b>Итого в семестре 2</b>	<b>18</b>	<b>18</b>
<b>Семестр 3</b>		
<b>Тема 13. Определённый интеграл и его свойства. Условия интегрируемости.</b> Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции. Верхние и нижние интегральные суммы и их свойства. Критерий интегрируемости. Некоторые классы интегрируемых функций.	4	
<b>Тема 14. Основная формула интегрального исчисления.</b> Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям в определённом интеграле. Замена переменных в определённом интеграле. Формула Тейлора с остаточным слагаемым в интегральной форме. Метод прямоугольников и метод трапеций приближённого вычисления определённых интегралов.	2	6
<b>Тема 15. Приложения определённого интеграла.</b> Понятие квадратуемой фигуры и её свойства. Вычисление площадей плоских фигур. Геометрический смысл определённого интеграла. Понятие кубического тела и вычисление объёмов. Объём тела	4	10

вращения. Понятие спрямляемой кривой. Длина кривой. Длина дуги как параметр. Дифференциал дуги. Площадь поверхности вращения. Приложение определённого интеграла к нахождению некоторых физических величин.		
<b>Тема 16. Несобственные интегралы.</b> Несобственный интеграл по бесконечному промежутку (несобственный интеграл 1 рода). Несобственный интеграл от неограниченной функции (несобственный интеграл 2 рода). Теоремы существования.	2	4
<b>Тема 17. Числовые ряды.</b> Понятие числового ряда. Частичные суммы и сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Бесконечная сумма убывающей геометрической прогрессии. Гармонический ряд. Признаки сравнения, Даламбера и Коши сходимости числовых рядов. Интегральный признак сходимости. Знакопеременный ряд, признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды, их свойства.	3	6
<b>Тема 18. Функциональные и степенные ряды.</b> Функциональные последовательности и функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Теорема о сходимости ряда Тейлора.	3	10
<b>Итого в семестре 3</b>	<b>18</b>	<b>36</b>
<b>Семестр 4</b>		
<b>Тема 19. Функции нескольких переменных.</b> Примеры числовых функций нескольких переменных. График числовой функции двух переменных. Понятие евклидова пространства $R^n$ . Понятия открытого, замкнутого, связного множеств и области в евклидовом пространстве. Понятия предела и непрерывности числовой функции нескольких переменных. Основные свойства предела и непрерывности функций нескольких переменных.	6	4
<b>Тема 20. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных.</b> Частные производные, дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных. Частные производные и дифференциал сложных функций нескольких переменных. Частные производные высших порядков, смешанные производные. Условия их независимости от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков.	6	4
<b>Тема 21. Приложения частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных.</b> Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Понятие локального экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Экстремум функции двух переменных. Неявная функция. Система неявных функций. Градиент функции и его геометрический смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.	8	8
<b>Тема 22. Двойные интегралы.</b> Квадрируемость и площадь плоской фигуры. Определение двойного интеграла. Теорема о его существовании и единственности.	6	10



Геометрический смысл и основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла, повторные интегралы. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Площадь криволинейного сегмента. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла. Некоторые физические приложения двойного интеграла.		
<b>Тема 23. Тройные интегралы.</b> Кубируемость и объём фигуры в трёхмерном пространстве. Определение, теорема о существовании и единственности и основные свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла через повторные интегралы. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Геометрические приложения тройного интеграла: объём фигуры по площадям параллельных сечений, объём тела вращения, объём криволинейного шарового сегмента. Некоторые физические приложения тройного интеграла.	6	10
<b>Тема 24. Многомерные интегралы.</b> Измеримость и мера Жордана фигуры в многомерном пространстве. Определение, теорема о существовании и единственности и основные свойства многомерного интеграла. Вычисление многомерного интеграла через повторные интегралы. Замена переменных в многомерном интеграле.	4	
<b>Итого в семестре 4</b>	<b>36</b>	<b>36</b>
<b>Итого</b>	<b>108</b>	<b>144</b>

Очно-заочная форма обучения

Наименование разделов (тем) Дисциплины	Кол-во часов	
	Лекции	Практические занятия
<b>Семестр 1</b>		
<b>Тема 1. Предварительные сведения о математическом анализе. Действительные числа.</b> Предмет математического анализа. Краткие исторические сведения. Структура курса математического анализа. Понятия множества и отображения. Рациональные и иррациональные числа. Свойство упорядоченности. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Рациональные числа как периодические десятичные дроби. Понятие об аксиоматическом построении множества действительных чисел. Изображение действительных чисел на прямой. Примеры числовых множеств. Абсолютная величина числа. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Максимумы и минимумы числовых множеств. Точные грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней.	3	3

<b>Тема 2. Понятия функции и последовательности. Предел последовательности.</b> Понятие действительной функции действительной переменной. Ограниченность, монотонность функций. Обратная и сложная функции. Понятия числовой последовательности и подпоследовательности. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Простейшие свойства предела последовательности. Свойства сходящейся последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенствах. Предел монотонной последовательности. Число $e$ как предел последовательности $(1+1/n)^n$ . Теорема Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.	3	4
<b>Тема 3. Предел функции.</b> Определения предела функции в точке по Гейне и по Коши и эквивалентность этих определений. Свойства пределов функций и свойства функций, имеющих предел. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности. Теорема о пределе сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Функции одного порядка и бесконечно малые функции (отношения «О» и «о»). Эквивалентные функции, таблица эквивалентности основных элементарных функций.	2	5
<b>Тема 4. Непрерывность функции.</b> Непрерывность функции в точке. Основные свойства непрерывных функций. Операции над непрерывными функциями. Предельный переход под знаком непрерывной функции. Ограниченность непрерывных на отрезке функций. Достижение экстремальных значений. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Точки разрыва функции и их классификация.	2	4
<b>Тема 5. Производная и дифференциал.</b> Производная и её физический и геометрический смыслы. Касательная к графику функции. Дифференцируемые функции. Дифференциал и его геометрический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, произведения и частного. Дифференцирование сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Логарифмическая производная функции. Неявно заданные функции и их дифференцирование. Параметрическое задание функций и их дифференцирование. Производные и дифференциалы высших порядков.	2	6
<b>Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления.</b> Локальные экстремумы функции. Лемма Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Применения теоремы Лагранжа. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей с помощью производных. Формула Тейлора с остаточным слагаемым в форме Пеано и в форме Лагранжа. Формула Маклорена. Бином Ньютона. Формула Лейбница производной высших порядков произведения функций.	4	4
<b>Тема 7. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению их графиков.</b> Признаки монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума функции. Задачи о наибольших и наименьших значениях функции. Направление выпуклости кривой и точки перегиба. Горизонтальная, вертикальная и наклонные асимптоты. Исследование	4	4

функции и построение графика.		
<b>Итого в семестре 1</b>	<b>20</b>	<b>30</b>
<b>Семестр 2</b>		
<b>Тема 8. Определение и свойства неопределённого интеграла.</b> Первообразная функции и неопределённый интеграл. Линейность и противоположность дифференцированию неопределённого интеграла. Таблица основных неопределённых интегралов.	2	2
<b>Тема 9. Основные методы интегрирования.</b> Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям.	2	2
<b>Тема 10. Интегрирование дробно-рациональных функций.</b> Неопределённые интегралы от простейших рациональных дробей. Сведение к интегралам от простейших рациональных дробей. Метод неопределённых коэффициентов и метод «вычёркиваний».	2	2
<b>Тема 11. Интегрирование тригонометрических функций.</b> Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование симметричных рациональных тригонометрических функций, тригонометрических биномов и произведений тригонометрических функций.	2	2
<b>Тема 12. Интегрирование иррациональных функций.</b> Интегрирование квадратичных и дробно-линейных иррациональностей. Дробно-линейная подстановка. Интегрирование дифференциальных биномов.	2	2
<b>Итого в семестре 2</b>	<b>10</b>	<b>10</b>
<b>Семестр 3</b>		
<b>Тема 13. Определённый интеграл и его свойства. Условия интегрируемости.</b> Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции. Верхние и нижние интегральные суммы и их свойства. Критерий интегрируемости. Некоторые классы интегрируемых функций.	2	
<b>Тема 14. Основная формула интегрального исчисления.</b> Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям в определённом интеграле. Замена переменных в определённом интеграле. Формула Тейлора с остаточным слагаемым в интегральной форме. Метод прямоугольников и метод трапеций приближённого вычисления определённых интегралов.	2	4
<b>Тема 15. Приложения определённого интеграла.</b> Понятие квадратуемой фигуры и её свойства. Вычисление площадей плоских фигур. Геометрический смысл определённого интеграла. Понятие кубического тела и вычисление объёмов. Объём тела вращения. Понятие спрямляемой кривой. Длина кривой. Длина дуги как параметр. Дифференциал дуги. Площадь поверхности вращения. Приложение определённого интеграла к нахождению некоторых физических величин.	2	6
<b>Тема 16. Несобственные интегралы.</b> Несобственный интеграл по бесконечному промежутку (несобственный интеграл 1 рода). Несобственный интеграл от неограниченной функции	2	4

(несобственный интеграл 2 рода). Теоремы существования.		
<b>Тема 17. Числовые ряды.</b> Понятие числового ряда. Частичные суммы и сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Бесконечная сумма убывающей геометрической прогрессии. Гармонический ряд. Признаки сравнения, Даламбера и Коши сходимости числовых рядов. Интегральный признак сходимости. Знакопеременный ряд, признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды, их свойства.	2	4
<b>Тема 18. Функциональные и степенные ряды.</b> Функциональные последовательности и функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Теорема о сходимости ряда Тейлора.	2	6
<b>Итого в семестре 3</b>	<b>12</b>	<b>24</b>
<b>Семестр 4</b>		
<b>Тема 19. Функции нескольких переменных.</b> Примеры числовых функций нескольких переменных. График числовой функции двух переменных. Понятие евклидова пространства $R^n$ . Понятия открытого, замкнутого, связного множеств и области в евклидовом пространстве. Понятия предела и непрерывности числовой функции нескольких переменных. Основные свойства предела и непрерывности функций нескольких переменных.	4	4
<b>Тема 20. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных.</b> Частные производные, дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных. Частные производные и дифференциал сложных функций нескольких переменных. Частные производные высших порядков, смешанные производные. Условия их независимости от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков.	4	4
<b>Тема 21. Приложения частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных.</b> Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Понятие локального экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Экстремум функции двух переменных. Неявная функция. Система неявных функций. Градиент функции и его геометрический смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.	4	4
<b>Тема 22. Двойные интегралы.</b> Квадрируемость и площадь плоской фигуры. Определение двойного интеграла. Теорема о его существовании и единственности. Геометрический смысл и основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла, повторные интегралы. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Площадь криволинейного сегмента. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла. Некоторые физические приложения двойного интеграла.	4	4
<b>Тема 23. Тройные интегралы.</b>	4	4

Кубируемость и объём фигуры в трёхмерном пространстве. Определение, теорема о существовании и единственности и основные свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла через повторные интегралы. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Геометрические приложения тройного интеграла: объём фигуры по площадям параллельных сечений, объём тела вращения, объём криволинейного шарового сегмента. Некоторые физические приложения тройного интеграла.		
<b>Тема 24. Многомерные интегралы.</b> Измеримость и мера Жордана фигуры в многомерном пространстве. Определение, теорема о существовании и единственности и основные свойства многомерного интеграла. Вычисление многомерного интеграла через повторные интегралы. Замена переменных в многомерном интеграле.	4	2
<b>Итого в семестре 4</b>	<b>24</b>	<b>24</b>
<b>Итого</b>	<b>66</b>	<b>88</b>

#### 4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Темы для самостоятельного изучения	Изучаемые вопросы	Кол-во часов		Формы самостоятельной работы	Методическое обеспечение	Формы отчетности
		Очная	Очно-заочная			
Семестр 1						
Тема 1. Предварительные сведения о математическом анализе. Действительные числа.	Рациональные числа как периодические десятичные дроби. Точные грани числовых множеств.	10	21	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы, устный опрос
Тема 2. Понятия функции и последовательности. Предел последовательности.	Обратная и сложная функции. Предел монотонной последовательности.	11	21	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы, устный опрос
Тема 3. Предел функции.	Понятие элементарной функции. Односторонние и бесконечные	11	21	Изучение материалов лекций, выполнение домашних	Учебно-методическое обеспечение	Конспекты, домашние задания, контрольные работы,

	пределы. Отношения «О» и «О».			заданий. Работа с учебной литературой	дисциплины	устный опрос
Тема 4. Непрерывность функций.	Теорема о непрерывности обратной функции. Теорема о разрывах монотонных функций.	11	21	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно- методиче ское обеспече ние дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольн ые работы, устный опрос
Тема 5. Производная и дифференциал.	Производные и дифференциалы высших порядков.	12	22	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно- методиче ское обеспече ние дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольн ые работы, устный опрос
Тема 6. Основные теоремы дифференциаль ного исчисления.	Формула Маклорена. Формула Лейбница.	11	22	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно- методиче ское обеспече ние дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольн ые работы, устный опрос
Тема 7. Применение дифференциаль ного исчисления к исследованию функций и построению их графиков.	Решение задач на исследование функций и построение графиков.	12	22	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно- методиче ское обеспече ние дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольн ые работы, устный опрос
<b>Итого в семестре 1</b>		<b>78</b>	<b>150</b>			
<b>Семестр 2</b>						
Тема 10. Интегрирование дробно- рациональных функций.	Метод неопределённы х коэффициентов и метод «вычёркиваний ».	8	2	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно- методиче ское обеспече ние дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольн ые работы
Тема 11. Интегрировани е тригонометрич	Универсальная тригонометриче ская подстановка.	10	1	Изучение материалов лекций, выполнение	Учебно- методиче ское обеспече	Конспекты, домашние задания, контрольн

еских функций.	Тригонометрические подстановки.			домашних заданий. Работа с учебной литературой	ние дисциплины	ые работы
Тема 12. Интегрирование иррациональных функций.	Интегрирование дифференциального бинома.	10	1	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
<b>Итого в семестре 2</b>		<b>28</b>	<b>4</b>			
<b>Семестр 3</b>						
Тема 14. Основная формула интегрального исчисления.	Определённый интеграл от чётной, нечётной и периодической функции.	8	4	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 15. Приложения определенного интеграла.	Площадь криволинейного сегмента и площадь области в параметрической форме.	8	4	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 16. Несобственные интегралы.	Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода	8	4	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 17. Числовые ряды.	Теоремы об абсолютно и условно сходящихся числовых рядах.	9	4	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы, устный опрос
Тема 18. Функциональные и степенные ряды.	Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной	9	4	Изучение материалов лекций, выполнение домашних	Учебно-методическое обеспечение	Контрольные работы, устный опрос

	сходимости функциональных рядов.			заданий. Работа с учебной литературой	дисциплины	
<b>Итого в семестре 3</b>		<b>42</b>	<b>20</b>			
<b>Семестр 4</b>						
Тема 19. Функции нескольких переменных.	Понятие и основные свойства предела числовой функции нескольких переменных.	10	19	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 20. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных.	Частные производные и дифференциал сложных функций нескольких переменных.	10	19	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 21. Приложения частных производных и дифференциалов в функциях нескольких переменных.	Формула Тейлора для функции двух переменных. Экстремум функции двух переменных. Касательная плоскость.	10	19	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 22. Двойные интегралы.	Двойные повторные интегралы. Замена переменных в двойном интеграле.	10	20	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 23. Тройные интегралы.	Тройной повторный интеграл. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.	10	20	Изучение материалов лекций, выполнение домашних заданий. Работа с учебной литературой	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспекты, домашние задания, контрольные работы
Тема 24. Многомерные интегралы.	Мера Жордана.	10	19	Изучение материалов лекций, выполнение домашних	Учебно-методическое обеспечение	Конспекты, домашние задания, контрольные работы



				заданий. Работа с учебной литературой	дисциплины	
<b>Итого в семестре 4</b>		<b>60</b>	<b>116</b>			
<b>Итого</b>		<b>208</b>	<b>290</b>			

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 5.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	1. Работа на учебных занятиях. 2. Самостоятельная работа.
ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.	1. Работа на учебных занятиях. 2. Самостоятельная работа.

### 5.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии и оценивания	Шкала оценивания
ПК-1	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: – современные концепции, теории, законы и методы в области физики, математики и информатики и перспективные направления развития современной науки; – значение и место дисциплин физико-математического цикла в общей картине мира. Уметь: – ясно и логично излагать полученные базовые знания; – продемонстрировать понимание общей структуры дисциплин физико-математического цикла и взаимосвязи их с другими дисциплинами; – строить модели реальных объектов или процессов; – профессионально решать задачи,	Конспект, домашнее задание, устный опрос, контрольная работа.	Шкала оценивания конспекта. Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрол

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии и оценивания	Шкала оценивания
			связанные с предметной областью, с учетом современных достижений науки; – применять информационно-коммуникационные технологии для эффективного решения научных и прикладных задач, связанных с предметной областью.		ьной работы.
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: – современные концепции, теории, законы и методы в области физики, математики и информатики и перспективные направления развития современной науки; – значение и место дисциплин физико-математического цикла в общей картине мира. Уметь: – ясно и логично излагать полученные базовые знания; – демонстрировать понимание общей структуры дисциплин физико-математического цикла и взаимосвязи их с другими дисциплинами; – строить модели реальных объектов или процессов; – профессионально решать задачи, связанные с предметной областью, с учетом современных достижений науки; – применять информационно-коммуникационные технологии для эффективного решения научных и прикладных задач, связанных с предметной областью. Владеть: – способностью к логическому рассуждению; – моделированием для построения объектов и процессов, определения или предсказания их свойств; – основными методами решения задач, сформулированными в рамках предметных областей.	Конспект, домашнее задание, устные опросы, контрольная работа.	Шкала оценивания конспекта. Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрольной работы.
ПК-3	Пороговый	1. Работа на учебных	Знать: – характеристику личностных, метапредметных и предметных	Конспект, домашнее	Шкала оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии и оценивания	Шкала оценивания
		занятиях 2. Самостоятельная работа	результатов образовательной деятельности в контексте в предметной области; способы оказания индивидуальной педагогической помощи и поддержки обучающимся в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей. Уметь: – оказывать адресную педагогическую помощь и поддержку обучающимся, в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей, в процессе достижения метапредметных, предметных и личностных результатов.	задание, устный опрос, контрольная работа.	конспект а. Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрольной работы.
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: – характеристику личностных, метапредметных и предметных результатов образовательной деятельности в контексте в предметной области; способы оказания индивидуальной педагогической помощи и поддержки обучающимся в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей. Уметь: – оказывать адресную педагогическую помощь и поддержку обучающимся, в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей, в процессе достижения метапредметных, предметных и личностных результатов. Владеть: – способностью и опытом применения в предметной области различных способов оказания адресной педагогической помощи и поддержки обучающимся в зависимости от их способностей,	Конспект, домашнее задание, устные опросы, контрольная работа.	Шкала оценивания конспекта а. Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрольной работы.

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии и оценивания	Шкала оценивания
			образовательных возможностей и потребностей.		

#### Шкала оценивания конспекта

Критерий	Баллы
Студент написал 0 – 10% всех лекций	0
Студент написал 11 – 20% всех лекций	1
Студент написал 21 – 40% всех лекций	2
Студент написал 41 – 60% всех лекций	3
Студент написал 61 – 80% всех лекций	4
Студент написал 81 – 100% всех лекций	5

#### Шкала оценивания домашнего задания

Показатель	Баллы
Студент правильно выполнил 0 – 10% домашнего задания	0
Студент правильно выполнил 11 – 20% домашнего задания	1
Студент правильно выполнил 21 – 40% домашнего задания	2
Студент правильно выполнил 41 – 60% домашнего задания	3
Студент правильно выполнил 61 – 80% домашнего задания	4
Студент правильно выполнил 81 – 100% домашнего задания	5

#### Шкала оценивания устного опроса

Критерий оценивания	Баллы
Студент ответил на вопрос и показал полное и уверенное знание темы	5
Студент ответил на вопрос, однако в ответе присутствуют несущественные ошибки, недостатки и недочёты	4
Студент в целом ответил на вопрос, но в ответе имеются заметные и грубые ошибки, недостатки и недочёты	3
Студент не ответил на вопрос, но имеются более двух правильных идей или подходов к правильному ответу	2
Студент не ответил на вопрос, но имеются только одна-две идеи или подходы к правильному ответу	1
Студент не ответил на вопрос и показал полное незнание темы задания	0

#### Шкала оценивания контрольной работы

Показатель	Баллы
Студент правильно выполнил 0 – 4% всех заданий	0
Студент правильно выполнил 5 – 10% всех заданий	1
Студент правильно выполнил 11 – 20% всех заданий	2
Студент правильно выполнил 21 – 30% всех заданий	3
Студент правильно выполнил 31 – 40% всех заданий	4
Студент правильно выполнил 41 – 50% всех заданий	5
Студент правильно выполнил 51 – 60% всех заданий	6

Студент правильно выполнил 61 – 70% всех заданий	7
Студент правильно выполнил 71 – 80% всех заданий	8
Студент правильно выполнил 81 – 90% всех заданий	9
Студент правильно выполнил 91 – 100% всех заданий	10

**5.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

**Примерный список тем для конспекта**

**Семестр 1**

1. Действительные числа.
2. Понятия функции и последовательности. Предел последовательности.
3. Пределы функций.
4. Непрерывность функций.
5. Производная и дифференциал.
6. Основные теоремы дифференциального исчисления.
7. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

**Семестр 2**

1. Понятие и свойства неопределённого интеграла.
2. Основные методы интегрирования.
3. Интегрирование дробно-рациональных функций.
4. Интегрирование тригонометрических функций.
5. Интегрирование иррациональных функций.

**Семестр 3**

1. Определённый интеграл и его свойства. Условия интегрируемости.
2. Формула Ньютона – Лейбница и её применения.
3. Геометрические и физические приложения определённого интеграла.
4. Несобственные интегралы.
5. Числовые ряды.
6. Функциональные и степенные ряды.

**Семестр 4**

1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Частные производные, дифференцируемость и дифференциал.
3. Приложения частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных.
4. Двойные интегралы.
5. Тройные интегралы.
6. Многомерные интегралы.

**Примерные задачи домашнего задания**

**Семестр 1**

1. Представить в виде обыкновенной дроби периодическую десятичную дробь:  
а) 3,7(936);      б) 7,1(603);      в) 1,(15);      г) 2,(45).
2. Найти точную верхнюю и точную нижнюю грани числовых множеств:

$$\text{a) } A = \left\{ \sqrt{\frac{10n+17}{n+2}}, n \in \mathbf{N} \right\} \cup [1, 2); \quad \text{б) } A = \{2^{1+3/n}, n \in \mathbf{N}\} \cup (18, 23].$$

3. Найти предел последовательности:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 1}{3^{n+1} + (-2)^n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+8} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n+2}); \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2}{2n+5} - \frac{2n^2 + 7n}{n+3} \right).$$

4. Найти предел функции:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 15x - 2}{\sqrt{x+7} - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi x/4)}{3^x - 4x - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[5]{\cos x}}{x \sin x}.$$

5. Найти производную  $y'(x)$  функции:

$$\text{a) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x); \quad \text{б) } y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}; \quad \text{в) } y = (\arccos x)^{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г) } y = x^{x \arcsin x}.$$

6. Найти вторую производную  $y''(x)$  функции:

$$\text{a) } y = \sqrt{x} - (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x}; \quad \text{б) } y = \ln \frac{x+4}{x-1}; \quad \text{в) } y = e^{\sin(5x)}.$$

7. Найти производную  $y''(x)$  параметрически заданной функции:

$$\text{a) } x = \sqrt{2t - t^2}, y = \arcsin(t-1); \quad \text{б) } x = \operatorname{tg}^2 t, y = \cos^3 t; \quad \text{в) } x = \ln \operatorname{tg} t, y = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

8. Разложить многочлен  $P(x)$  в ряд Тейлора с центром в точке  $x_0$ :

$$\text{a) } P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x, x_0 = -1; \quad \text{б) } P(x) = (x+1)^4 - 16x^2, x_0 = 1.$$

9. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции:

$$\text{a) } y = x - 5 \operatorname{arctg} x; \quad \text{б) } y = x^2 e^{-x^2}; \quad \text{в) } y = x^2 \ln x; \quad \text{г) } y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}.$$

10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

$$\text{a) } y = x^3 \ln x; \quad \text{б) } y = x^2 + \frac{1}{x}; \quad \text{в) } y = 6x^8 - 8x^6; \quad \text{г) } y = x^4 e^{-x}.$$

11. Найти асимптоты графика функции:

$$\text{a) } y = \frac{e^x + 4e^{-2x}}{e^x - e^{-2x}}; \quad \text{б) } y = \frac{\operatorname{arctg} x + \pi}{3 \operatorname{arctg} x - \pi}; \quad \text{в) } y = \frac{2x^4 + 5x}{(x+1)^2(x-2)}.$$

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\text{a) } y = x^4 + 4x, [-2, 2]; \quad \text{б) } y = \frac{x}{x^2 + 1}, [1/2, 3]; \quad \text{в) } y = x^3 - 7x^2 + 11x, [0, 2].$$

## Семестр 2

1. Найти неопределённый интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$\text{a) } \int (x+1) \sin(4x) dx; \quad \text{б) } \int (5x-2) e^{2x} dx; \quad \text{в) } \int x^3 \ln x dx.$$

2. Найти неопределённый интеграл, используя метод замены переменной:

$$\text{a) } \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+3\cos x}}; \quad \text{в) } \int x(2x+5)^{10} dx; \quad \text{г) } \int x^2 \exp(2x^3 + 1) dx.$$

3. Найти неопределённый интеграл от дробно-рациональной функции:

$$\text{a) } \int \frac{x+3}{x^3-4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+5}; \quad \text{в) } \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2}.$$

4. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции:

$$\text{a) } \int \sin^5 x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^4 x}; \quad \text{г) } \int \cos^3 x dx.$$

5. Найти неопределённый интеграл от квадратичной иррациональности:

$$\text{a) } \int \sqrt{x^2-1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x^2+1)^{5/2}}; \quad \text{в) } \int \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{3/2} dx.$$

### Семестр 3

1. Вычислить определённый интеграл:

$$\text{a) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}; \quad \text{б) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \quad \text{в) } \int_0^1 \arcsin x dx; \quad \text{г) } \int_3^5 \frac{\ln x dx}{x}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями на отрезке:

$$\text{a) } y = \frac{e^{1/x}}{x^2} \text{ и } y = 0, 1 \leq x \leq 2; \quad \text{б) } y = \frac{16}{x^2} \text{ и } y = 17 - x^2, 1 \leq x \leq 4.$$

3. Найти длину дуги кривой в прямоугольных координатах:

$$\text{a) } y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2; \quad \text{б) } y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$$

4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $OX$  кривой:

$$\text{a) } y = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}, 0 \leq x \leq \ln 5; \quad \text{б) } y = (x+1)^{-1} x, 0 \leq x \leq 1.$$

5. Найти несобственный интеграл 1-го рода:

$$\text{a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} \sqrt{x}}; \quad \text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^{5/4} n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n+4)}{3n^2 \sqrt{n+5}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{(2n+1)!}.$$

7. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+7)^n}{(n+1)(n+3)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (2x+5)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n^{3/2}}.$$

8. Разложить в ряд Тейлора по степеням  $x$  функцию  $y = y(x)$  и указать область сходимости ряда:

$$\text{a) } y = \frac{x}{1+5x-6x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2}; \quad \text{в) } y = (x+x^3) \operatorname{arctg} x.$$

9. Найти сумму степенного ряда и указать его область сходимости:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

### Семестр 4

1. Найти двойной предел:

$$\text{а) } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{xy + 3y^2} \ln \frac{x}{x - y}; \quad \text{б) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2)^2 \left( \operatorname{ch} \frac{1}{x^2 + y^2} - 1 \right); \quad \text{в) } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 4}} \left( 1 + \frac{10}{xy} \right)^x.$$

2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = z(x, y)$  в точке  $M(x_0, y_0)$ :

$$\text{а) } z = \frac{12}{x^2 y}, \quad M(2, 3); \quad \text{б) } z = 2^{y/x}, \quad M(1, 2); \quad \text{в) } z = \frac{1 - xy}{1 + xy}, \quad M(1, 3).$$

3. Найти частные производные  $z'_u$  и  $z'_v$  сложной функции  $z = z(x, y)$ , где  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$ , используя инвариантность формы дифференциала первого порядка:

$$\text{а) } z = \operatorname{arctg}(x^2 - y), \quad x = u, \quad y = u^2 - v^2; \quad \text{б) } z = \frac{x^2}{y}, \quad x = e^{u+v}, \quad y = e^{2u-v}.$$

4. Найти частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  неявно заданной функции  $z = z(x, y)$ :

$$\text{а) } \sin z + xy^3 z = xy; \quad \text{б) } e^z + 4z = x^3 \cos y; \quad \text{в) } \ln(1 + xyz) + z = x^3 y^5.$$

5. Найти частные производные второго порядка  $z''_{xx}$ ,  $z''_{xy}$ ,  $z''_{yy}$  и  $z''_{yx}$  функции  $z = z(x, y)$ :

$$\text{а) } z = \sin(xy + \cos y); \quad \text{б) } z = \ln(1 + x^2 y^4); \quad \text{в) } z = \operatorname{arctg}(x^2 y^4); \quad \text{г) } z = x^{xy}.$$

6. Найти частную производную высшего порядка функции  $z = z(x, y)$ :

$$\text{а) } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad z = e^{xy}; \quad \text{б) } \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}, \quad z = \frac{x - y}{x + y}; \quad \text{в) } \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad z = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

7. Разложить многочлен  $P(x, y)$  в ряд Тейлора с центром разложения в точке  $M(x_0, y_0)$ :

$$\text{а) } P(x, y) = x^4 + 2xy + y^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1; \quad \text{б) } P(x, y) = x^3 + xy + x - y, \quad x_0 = -1, \quad y_0 = -1.$$

8. Найти локальные экстремумы функции  $z = z(x, y)$ :

$$\text{а) } z = xy - \ln x + \frac{2}{\sqrt{y}}; \quad \text{б) } z = x^3 - y^3 - 3xy; \quad \text{в) } z = xy(1 - x - y).$$

9. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\text{а) } \int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy; \quad \text{в) } \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy; \quad \text{г) } \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy.$$

10. Найти двойной интеграл:

$$\text{а) } \iint_D (y - x) dx dy, \quad \text{где } D = \{1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq x^3\};$$

$$\text{б) } \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy, \quad \text{где } D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$\text{в) } \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy, \quad \text{где } D = \{x^2 + y^2 \leq 16, x \leq y \leq x\sqrt{3}\};$$

$$\text{г) } \iint_D y dx dy, \quad \text{где } D = \{x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}.$$

11. Найти тройной интеграл:

$$\text{а) } \iiint_H xz(1 - y) dx dy dz, \quad \text{где } H = \{x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\};$$

$$\text{б) } \iiint_H (x + y) dx dy dz, \quad \text{где } H = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, y \leq z \leq 2y\};$$



- в)  $\iiint_H xyz^2 dx dy dz$ , где  $H = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ;
- г)  $\iiint_H (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где  $H = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$ .

## Примерные задания контрольной работы

### Семестр 1

1. Представить в виде обыкновенной дроби периодическую десятичную дробь  $4,(135)$ .
2. Найти предел последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + 4(n+1)!}{5(n+3)! - 7(n+2)!}$ .
3. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ .
4. Найти точки разрыва функции  $y = \frac{2x-3}{\log_2 |x|}$  и указать их тип.
5. Найти производную функции  $y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1}$ .
6. Найти производную  $y'(x)$  параметрически заданной функции  $x = \arcsin \sqrt{t}$ ,  $y = (1 + \sqrt{t})^{1/2}$ .
7. Найти производную  $y'(x)$  неявно заданной функции  $y = y(x): xy - \ln y = 3$ .
8. Найти общее выражение для производной порядка  $n$  от функции  $y = \ln(3x - 2)$ .
9. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции  $y = \frac{x}{\ln x}$ .
10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции  $y = xe^{-x^2/2}$ .
11. Найти асимптоты графика функции  $y = \frac{5x^3 - 2x + 1}{4x^2 - 7x + 3}$ .

### Семестр 2

1. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^3}{x} dx$ .
2. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$ .
3. Найти неопределённый интеграл  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .
4. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)(x+5)} dx$  методом «вычёркиваний».
5. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{e^{3x} dx}{(2 + e^x)^4}$ .
6. Найти неопределённый интеграл  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ .
7. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ .
8. Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$ .

### Семестр 3

1. Найти определённый интеграл  $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$ .
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \cos(\pi x)$  и  $y = \frac{3x}{2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ .
3. Найти длину дуги кривой в прямоугольных координатах  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси  $OX$  кривой  $y = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ ,  $1 \leq x \leq 3$ .
5. Найти несобственный интеграл 1-го рода  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ .
6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4 + \ln^2 n)n}$ .
7. Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^{n-1}(n+1)}$ .
8. Разложить функцию  $\frac{\sin(3x)}{x} - 3\cos x$  в ряд Тейлора по степеням  $x$  и указать область сходимости ряда.

### Семестр 4

1. Найти двойной предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+x^2y)}{\sqrt{1+x^3y}-1}$ .
2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$  в точке  $M(1, 4)$ .
3. Найти частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  неявно заданной функции  $z = z(x, y)$ :  
 $z - \sin(xyz) = e^x y^2$ .
4. Найти все частные производные 2-го порядка функции  $z(x, y) = y \ln(1+x^2y)$ .
5. Разложить многочлен  $P(x, y) = x^3 + 2xy + y$  в ряд Тейлора с центром в точке  $M(-1, -1)$ .
6. Найти локальные экстремумы функции  $z(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2}$ .
7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле  $\int_{-1}^0 dy \int_{y^3}^0 f(x, y) dx$ .
8. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 4} dx dy$ , где  $D = \{4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \leq y\}$ .
9. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_H dx dy dz$ , где  $H = \{x + 2y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .
10. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_H z dx dy dz$ , где  $H = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ .

### Примерные вопросы устного опроса

### Семестр 1

1. Как определяют рациональные и действительные числа? Что такое иррациональные числа?
2. В чём состоят свойства упорядоченности и свойства непрерывности?
3. Перечислить основные аксиомы множества действительных чисел.
4. Что такое действительная функция действительной переменной? Что такое график функции?
5. Что означает ограниченность и неограниченность функции? Что такое четная, нечетная или периодическая функция?
6. Что такое сложная функция?
7. Что такое обратная функция? Каково условие её существования?
8. Дать определение предела числовой последовательности. Что такое бесконечные пределы?
9. Каковы основные свойства сходящихся последовательностей?
10. Как выглядят арифметические операции над сходящимися последовательностями?
11. В чем состоит теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности?
12. Что такое число  $\epsilon$ ? Как доказывают сходимость последовательности к данному числу?
13. Сформулировать теорему Больцано – Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
14. Что такое фундаментальная последовательность? Сформулировать критерий Коши сходимости последовательности.
15. Что такое бесконечно малые последовательности? Какова их связь с бесконечно большими последовательностями?
16. Сформулировать определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.
17. Что такое односторонние пределы?
18. Сформулировать определение предела функции на бесконечности.
19. Сформулировать определение бесконечного предела.
20. Каковы основные свойства пределов функции и арифметические действия над пределами функций?
21. Что означают пределы монотонных функций?
22. Каковы замечательные пределы?
23. Что такое бесконечно малые функции? Какова их связь с бесконечно большими функциями?
24. Что такое « $O$ » и « $o$ » отношения между функциями в пределе? Каковы их свойства?
25. Что такое эквивалентные функции в пределе? Каковы их свойства?
26. Что значит непрерывность функции в точке? Каковы локальные свойства непрерывных функций?
27. Каковы основные операции над непрерывными функциями? В чём состоит предельный переход под знаком непрерывной функции?
28. Что такое точка разрыва функции? Каковы типы точек разрыва? Сформулировать теорему о разрывах монотонных функций.
29. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях.
30. В чём состоит теорема о промежуточных значениях непрерывных функций?
31. Что такое производная функции? Каков её геометрический и физический смысл?
32. Что такое дифференцируемость функции? Каково необходимое условие дифференцируемости?
33. Сформулировать формулы для производной суммы, произведения и частного функций.
34. Сформулировать формулы для производной сложной и обратной функций.
35. Что такое дифференциал и какое его геометрическое значение?
36. Перечислить производные основных элементарных функций.
37. Что такое производные и дифференциалы высших порядков?
38. Как находить производные функции, заданной параметрически?
39. Сформулировать теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
40. Перечислить виды неопределённости. В чём состоит правило Лопиталя раскрытия

неопределённостей?

41. Что такое формула Тейлора? Каково остаточное слагаемое в форме Пеано и в форме Лагранжа?
42. Каковы признаки монотонности функции?
43. Перечислить достаточные условия локального экстремума функции.
44. Что такое выпуклость функции? Что такое точка перегиба функции?
45. Каковы признаки выпуклости функции?
46. Перечислить достаточные условия точки перегиба функции.
47. Что такое вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции?
48. Сформулировать план построения графика функции.

## Семестр 2

1. Что такое первообразная функции? Что такое неопределённый интеграл?
2. Каковы основные свойства неопределённого интеграла?
3. Сформулировать таблицу основных неопределённых интегралов.
4. В чём состоит метод интегрирования по частям?
5. В чём состоит метод замены переменной в неопределённом интеграле?
6. Что такое простейшие рациональные дроби? В чём состоит метод неопределённых коэффициентов и метод «вычёркиваний»?
7. Как вычислять интегралы от простейших рациональных дробей?
8. Что такое рациональная тригонометрическая функция? Что такое универсальная тригонометрическая подстановка?
9. Как проводят интегрирование симметричных рациональных тригонометрических функций?
10. Как интегрируют тригонометрические биномы и произведения тригонометрических функций?
11. Что такое квадратичные иррациональности и как их интегрируют?
12. Что такое дробно-линейные иррациональности? Что такое дробно-линейная подстановка?
13. Что такое дифференциальные биномы? Как их интегрируют?

## Семестр 3

1. Что такое определённый интеграл? В чём заключается необходимое условие интегрируемости функции?
2. Что такое верхние и нижние суммы Дарбу?
3. В чём заключается критерий интегрируемости функций?
4. Перечислить основные классы интегрируемых функций.
5. Каковы основные свойства интеграла с переменным верхним пределом? Привести формулу Ньютона – Лейбница.
6. Привести формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
7. Привести формулы замены переменных в определённом интеграле.
8. В чём состоят формула прямоугольников и формула трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла?
9. Что такое квадратуемая фигура? Как вычисляют площади плоских фигур?
10. Что такое кубируемое тело? Как вычисляют объёмы тел? Привести формулу объёма тела вращения.
11. Что такое спрямляемая кривая? Привести формулы длины дуги кривой в параметрическом задании и на плоскости.
12. Привести формулу площади поверхности вращения.
13. Дать определение несобственного интеграла 1 рода. Сформулировать теоремы о сходимости несобственного интеграла 1 рода.
14. Дать определение несобственного интеграла 2 рода. Сформулировать теоремы о

сходимости несобственного интеграла 2 рода.

15. Дать определение сходимости числового ряда. Сформулировать необходимый признак сходимости числового ряда.
16. Чему равна бесконечная сумма убывающей геометрической прогрессии? Что такое гармонический ряд?
17. Сформулировать признаки сравнения сходимости числовых рядов.
18. Сформулировать признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов.
19. Сформулировать интегральный признак сходимости числовых рядов.
20. Что такое знакопеременный ряд? Сформулировать признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов.
21. Что такое абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды? Каковы их свойства?
22. Что такое функциональный ряд? Дать определение равномерной сходимости функционального ряда.
23. Сформулировать критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
24. Сформулировать основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
25. Что такое степенной ряд? Дать определение радиуса и области сходимости степенного ряда.
26. Что такое ряд Тейлора? Сформулировать теорему о сходимости ряда Тейлора.

#### Семестр 4

1. Что такое  $n$ -мерное евклидово пространство? Что такое числовая функция нескольких переменных?
2. Дать определение предела по Коши и по Гейне числовой действительной функции нескольких переменных. Что такое непрерывная функция нескольких переменных?
3. Что такое открытое и замкнутое множества  $n$ -мерного евклидова пространства? Какова их связь?
4. Что такое связное множество? Сформулировать теорему о непрерывной функции на связном множестве. Что такое область, замкнутая область?
5. Дать определение частной производной. Что такое дифференцируемость функции нескольких переменных?
6. Сформулировать достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
7. Сформулировать правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных.
8. Написать уравнение касательная плоскость к поверхности. В чём заключается геометрический смысл дифференциала функции двух переменных?
9. Дать определение частных производных высших порядков и многократной дифференцируемости функции нескольких переменных.
10. Сформулировать достаточное условие многократной дифференцируемости функции нескольких переменных.
11. Что такое смешанные производные? Каковы условия их независимости от порядка дифференцирования.
12. Что такое дифференциалы высших порядков? Привести формулы для дифференциалов высших порядков.
13. Привести формулу Тейлора и формулу остаточного слагаемого в форме Лагранжа для функции двух переменных.
14. Что такое неявная функция? Сформулировать теорему о неявной функции.
15. Что такое система неявных функций? Сформулировать теорему о системе неявных функций.
16. Что такое локальный экстремум функции нескольких переменных? Необходимое условие локального экстремума функции нескольких переменных.

17. Сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных.
18. Что такое квадрируемая фигура? Привести примеры квадрируемых фигур на плоскости.
19. Что такое двойной интеграл? Каковы необходимые и достаточные условия существования двойного интеграла? Каковы основные свойства двойного интеграла?
20. Что такое повторный интеграл? В каких случаях двойной интеграл сводится к повторному интегралу?
21. Как осуществляется замена переменных интегрирования в двойном интеграле? Что такое якобиан замены? Чему равен двойной интеграл в полярных координатах?
22. Как вычисляют массу плоской фигуры? Как вычисляют площадь плоской фигуры, ограниченной линиями?
23. Что такое криволинейный сектор и криволинейный сегмент? Как вычисляют их площади?
24. Что такое интеграл Пуассона, как его вычисляют и чему он равен?
25. Что такое кубируемая фигура? Привести примеры кубируемых фигур в пространстве.
26. Что такое тройной интеграл, и каковы необходимые и достаточные условия его существования?
27. Каковы основные свойства тройного интеграла? Как его сводят к повторному интегралу?
28. Как выполняют замену переменных в тройном интеграле? Как выглядит тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах?
29. Как применяют тройной интеграл для вычисления объёмов тел? Что такое параллельные сечения и как их используют при вычислении объёма тела?
30. Что такое криволинейный шаровой сектор и криволинейный шаровой сегмент? Чему равны их объёмы?
31. Как применяют тройные интегралы для вычисления массы тела с переменной плотностью?
32. Что такое измеримая фигура в многомерном пространстве и мера Жордана? Привести примеры измеримых фигур.
33. Что такое многомерный интеграл, и каково достаточное условие его существования?
34. Как вычисляют многомерный интеграл с помощью повторного интеграла?
35. Как выполняют замену переменных в многомерном интеграле?

## Примерные вопросы к экзамену

### Семестр 1

1. Числовые множества. Множество действительных чисел. Периодические десятичные дроби. Максимум и минимум числовых множеств.
2. Множество действительных чисел. Точная верхняя и точная нижняя грани числовых множеств. Теорема о точных гранях.
3. Числовая функция. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. Сложная и обратная функция.
4. Сложная и обратная функция. Чётная, нечётная и периодическая функция. Возрастание и убывание функции.
5. Основные элементарные функции. Понятие элементарной функции.
6. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Арифметические операции с пределами последовательностей.
7. Арифметические операции с пределами последовательностей. Свойства предела последовательности.
8. Теорема о монотонных ограниченных последовательностях. Число  $e$ . Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
9. Теорема Больцано – Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.
10. Предел функции. Односторонний и бесконечный пределы функции.
11. Свойства предела функции. Первый и второй замечательные пределы.
12. Непрерывность функции. Свойства непрерывности функции.

13. Разрывы функции. Теорема о разрывах монотонных функций.
14. Отношения «О» и «о». Эквивалентные функции.
15. Производная функции. Дифференцируемость функции. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.
16. Производная функции. Её геометрический и физический смысл.
17. Производная функции. Правила дифференцирования.
18. Производная функции. Производные основных элементарных функций.
19. Гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс. Их производные.
20. Обратные гиперболические функции. Их производные.
21. Производная показательной-степенной функции. Логарифмическая производная.
22. Дифференциал. Его свойства. Инвариантность формы дифференциала.
23. Производная параметрически заданной функции.
24. Производные и дифференциалы высших порядков.
25. Необходимое условие локального экстремума функции. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Функция с нулевой производной.
26. Виды неопределённостей. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.
27. Формула Тейлора для многочлена. Бином Ньютона. Формула Лейбница для производной высшего порядка произведения функций.
28. Формула Тейлора для произвольной функции. Остаточное слагаемое в форме Пеано и в форме Лагранжа.
29. Теоремы о возрастании и убывании функций. Достаточные условия локального экстремума функции. Экстремум функции, заданной на отрезке.
30. Выпуклость функций. Необходимое и достаточное условия выпуклости функции. Теорема о выпуклости функции.
31. Точка перегиба функции. Достаточные условия точки перегиба функции.
32. Асимптоты графика функции. Схема построения графика функции.

### Семестр 3

1. Понятие определённого интеграла. Геометрический смысл определённого интеграла.
2. Понятие определённого интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции.
3. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. Их свойства (леммы). Основная лемма Дарбу.
4. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. 1-е необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.
5. Верхняя и нижняя суммы Дарбу. 2-е необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.
6. Равномерная непрерывность функции. Интегрируемость непрерывной функции.
7. Равномерная непрерывность функции. Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.
8. Линейность, аддитивность и нормировка определённого интеграла.
9. Неравенства для определённого интеграла. Теорема о среднем.
10. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
11. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.
12. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование производной функции, интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле.
13. Формула Ньютона – Лейбница. Определённый интеграл от чётной, нечётной и периодической функции.
14. Формула Ньютона – Лейбница. Формула Тейлора с остаточным слагаемым в интегральной форме и в форме Лагранжа.
15. Длина дуги кривой в пространстве. Длина дуги плоской кривой в прямоугольных и полярных координатах.
16. Площадь области на плоскости, ограниченной кривыми. Площадь криволинейного сегмента.
17. Объём тела по площадям параллельных сечений. Объём тела вращения.

18. Площадь поверхности вращения в прямоугольных координатах.
19. Несобственный интеграл 1-го рода. Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода.
20. Несобственный интеграл 2-го рода. Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода.
21. Понятие числового ряда. Частичные суммы и сходимость ряда. Бесконечная сумма убывающей геометрической прогрессии.
22. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
23. Признаки сравнения числовых рядов. Признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов.
24. Интегральный признак сходимости числового ряда. Дзета-функция Римана.
25. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды.
26. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды. Теоремы об абсолютно и условно сходящихся рядах.
27. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
28. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
29. Тожество Абеля. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
30. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность, почленное интегрирование и почленное дифференцирование.
31. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.
32. Степенные ряды. Непрерывность, почленное дифференцирование и почленное интегрирование степенного ряда.
33. Ряд Тейлора. Остаточное слагаемое в форме Лагранжа. Теорема о сходимости ряда Тейлора.

#### Семестр 4

1. Функция нескольких переменных. Область определения, предел по Коши, предел по Гейне и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Арифметические операции с пределами функций нескольких переменных. Непрерывность сложной функции.
3. Арифметические операции с пределами функций нескольких переменных. Устойчивость знака функции, имеющей предел.
4. Ограниченное множество. Связное множество. Прохождение непрерывной функции через промежуточное значение.
5. Открытое и замкнутое множества. Область. Теоремы Вейерштрасса о непрерывной функции в замкнутой ограниченной области.
6. Частные производные первого порядка. Дифференцируемость функции нескольких переменных, дифференциал функции.
7. Частные производные первого порядка. Геометрический смысл частных производных. Уравнение касательной плоскости к поверхности.
8. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцирование сложной функции.
9. Производная функции по направлению. Градиент функции и его геометрический смысл.
10. Частные производные высших порядков. Смешанные производные, их равенство.
11. Достаточное условие  $n$ -кратной дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференциалы высших порядков.



12. Формула Тейлора функции нескольких переменных. Остаточное слагаемое в форме Пеано и в форме Лагранжа. Полином Ньютона.
13. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Экстремум функции двух переменных.
14. неявная функция. Теорема о существовании и единственности неявной функции. Дифференцирование неявной функции.
15. Система неявных функций. Якобиан. Теорема о существовании и единственности системы неявных функций.
16. Квадрируемость и площадь плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции.
17. Определение и геометрический смысл двойного интеграла. Теорема о существовании и единственности двойного интеграла.
18. Основные свойства двойного интеграла. Теорема о среднем значении.
19. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Повторные интегралы.
20. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
21. Площадь криволинейного сегмента. Вычисление интеграла Пуассона.
22. Кубируемость и объём фигуры в трёхмерном пространстве. Примеры кубируемых фигур.
23. Определение, теорема о существовании и единственности и основные свойства тройного интеграла.
24. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Повторные интегралы.
25. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

### Примерные вопросы к зачету

#### . Семестр 2

1. Первообразная функции и неопределённый интеграл. Линейность неопределённого интеграла и его противоположность дифференцированию.
2. Неопределённый интеграл. Таблица основных неопределённых интегралов.
3. Неопределённый интеграл. Метод замены переменной.
4. Неопределённый интеграл. Метод интегрирования по частям.
5. Неопределённые интегралы от простейших рациональных дробей.
6. Интегрирование дробно-рациональной функции. Сведение к интегралам от простейших рациональных дробей.
7. Интегрирование дробно-рациональных функций. Метод неопределённых коэффициентов.
8. Интегрирование дробно-рациональных функций. Метод «вычёркиваний».
9. Интегрирование рациональных тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
10. Интегрирование симметричных рациональных тригонометрических функций.
11. Интегрирование тригонометрических биномов и произведений тригонометрических функций.
12. Интегрирование квадратичных иррациональностей.
13. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей. Дробно-линейная подстановка.
14. Интегрирование дифференциальных биномов.

#### **5.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Итоговая оценка знаний, умений, способов деятельности студентов по изучаемой дисциплине составляет 100 баллов

Максимальное количество баллов, которое можно набрать на очной и заочной формах обучения, выполняя задания на курсе в течение одного семестра за изучение лекционного

материала, выполнение практических заданий и текущий контроль – 70 баллов (при сдаче экзамена) / 80 баллов (при сдаче зачета).

За выполнение конспектов обучающийся может набрать максимально 5 баллов.

За выполнение одного домашнего задания обучающийся может набрать 5 баллов. Всего в каждом семестре предусмотрено 5 домашних заданий.

За ответ на один вопрос устного опроса обучающийся может набрать максимально 5 баллов. Всего в каждом семестре обучающемуся задают 5 вопросов.

За выполнение одной контрольной работы обучающийся может набрать максимум 10 баллов. Всего в каждом семестре предусмотрены 2 контрольные работы.

Максимальная сумма баллов, которые обучающийся может набрать при сдаче экзамена, составляет 30 баллов / при сдаче зачета 20 баллов.

Для сдачи экзамена/зачета необходимо выполнить все задания текущего контроля. Значимым моментом является показатель изучения материала лекций и выполнение заданий в указанные сроки. На экзамен/зачет выносятся материал, излагаемый в лекциях и рассматриваемый на практических занятиях.

Также в течение каждого семестра предусмотрено выполнение контрольной работы. Максимальная сумма баллов, которые обучающийся может набрать при выполнении контрольной работы, составляет 100 баллов.

### **Шкала оценивания контрольной работы**

Показатель	Баллы
Выполнено до 40% заданий	0-40
Выполнено 41-60% заданий	41-60
Выполнено 61-80% заданий	61-80
Выполнено более 81% заданий	81-100

### **Шкала оценивания зачёта**

Количество баллов	Критерии оценивания
16-20	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач
10-15	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
5-9	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
0-4	Если студент не ориентируется в теоретическом материале, не знает большинство формулировок основных определений, теорем и свойств и не умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

### ***Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины***

Итоговая оценка по дисциплине формируется из суммы баллов по результатам текущего контроля и промежуточной аттестации и выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей.

<b>Оценка по 100-балльной системе</b>	<b>Оценка по традиционной системе</b>
81 – 100	Зачтено
61 – 80	Зачтено
41 – 60	Зачтено
0 – 40	Не зачтено

### **Шкала оценивания экзамена.**

<b>Количество баллов</b>	<b>Критерии оценивания</b>
25 – 30	имеет место полное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать все теоремы из лекционного курса и решает все задачи и примеры из приведенных заданий
19 – 24	имеет место основное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать основные теоремы из лекционного курса и решает основные задачи и примеры из приведенных заданий
13 – 18	имеет место знание без доказательства основных теорем и формул курса; студент умеет решать задачи и примеры из приведенных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики
0 – 12	имеет место неусвоение основных теорем и формул курса; студент не умеет решать задачи и примеры из заданных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики

### **Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины**

Итоговая оценка по дисциплине формируется из суммы баллов по результатам текущего контроля и промежуточной аттестации и выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей.

<b>Оценка по 100-балльной системе</b>	<b>Оценка по традиционной системе</b>
81 – 100	Отлично
61 – 80	Хорошо
41 – 60	Удовлетворительно
0 – 40	Неудовлетворительно

## **6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

## 6.1. Основная литература

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч.: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: Часть 1 в 2 кн. Книга 1: <https://urait.ru/bcode/513351> (дата обращения: 06.06.2023). Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : <https://urait.ru/bcode/513352> (дата обращения: 06.06.2023). Часть 2 : <https://urait.ru/bcode/511024> (дата обращения: 06.06.2023).
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т.: учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 703 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15800-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: Том 1: <https://urait.ru/bcode/509770> (дата обращения: 06.06.2023). Том 2 в 2 книгах. Книга 1 : <https://urait.ru/bcode/512869> (дата обращения: 06.06.2023). Том 2 в 2 книгах. Книга 2 : <https://urait.ru/bcode/512870> (дата обращения: 06.06.2023). Том 3 : <https://urait.ru/bcode/510768> (дата обращения: 06.06.2023).
3. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: учебник для вузов. ч.1 / Г. М. Фихтенгольц. - 11-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2019. - 444с. - Текст: непосредственный. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа [Текст] : учебник для вузов. ч.2 / Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2019. - 464с. - Текст: непосредственный. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 444 с. — ISBN 978-5-507-45877-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: Часть 1: <https://e.lanbook.com/book/289001> (дата обращения: 06.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей. Часть 2: <https://e.lanbook.com/book/297692> (дата обращения: 06.06.2023). — Режим доступа: для авторизованных пользователей.

## 6.2. Дополнительная литература

1. Баврин, И. И. Математический анализ : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 327 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-04617-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/507814> (дата обращения: 06.06.2023).
2. Будаев, В.Д. Математический анализ : функции одной переменной: учебник для вузов / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. - СПб. : Лань, 2019. - 544с. – Текст: непосредственный. Будаев, В. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных : учебник для вузов / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. — 2-е изд. стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 456 с. — ISBN 978-5-8114-8294-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/174290> (дата обращения: 06.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие - 20-е изд. - СПб. : Лань, 2018. - 624с. – текст: непосредственный. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — 25-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 624 с. — ISBN 978-5-507-47148-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/332675> (дата обращения: 06.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Капкаева, Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебное пособие для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва :

- Издательство Юрайт, 2023. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04898-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515115> (дата обращения: 06.06.2023).
5. Кытманов, А. М. Математический анализ : учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 607 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-2785-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/425244> (дата обращения: 06.06.2023).
  6. Никитин, А. А. Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для вузов / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 460 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00464-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511175> (дата обращения: 06.06.2023).
  7. Садовнича, И. В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учебное пособие для вузов / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко ; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 115 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08473-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515257> (дата обращения: 06.06.2023).
  8. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для вузов / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 245 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00884-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/512337> (дата обращения: 06.06.2023).

### **6.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ: <http://lib.mexmat.ru/>
2. Математическое бюро: Учебники по математическому анализу: <http://www.matburo.ru>
3. <http://www.library.mephi.ru/>
4. <http://ega-math.narod.ru/>
5. <http://neo-chaos.narod.ru/fikhtengolts.html>

## **7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы бакалавров.
2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям.

## **8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

### **Лицензионное программное обеспечение:**

Microsoft Windows

Microsoft Office

Kaspersky Endpoint Security

### **Информационные справочные системы:**

Система ГАРАНТ  
Система «КонсультантПлюс»

**Профессиональные базы данных:**

[fgosvo.ru](http://fgosvo.ru) – Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования

[pravo.gov.ru](http://pravo.gov.ru) - Официальный интернет-портал правовой информации

[www.edu.ru](http://www.edu.ru) – Федеральный портал Российское образование

**Свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства:**

ОМС Плеер (для воспроизведения Электронных Учебных Модулей)

7-zip

Google Chrome

## **9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: учебной мебелью, доской, демонстрационным оборудованием, персональными компьютерами, проектором;
- помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде.