

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Наумова Наталья Александровна
Должность: Ректор
Дата подписания: 24.10.2024 14:21:41
Уникальный программный ключ:
6b5279da4e034bffa79172803da5b7b559fc69e2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

Экономический факультет
Кафедра прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры прикладной математики
и информатики
Протокол от «10» июня 2021 г. № 11
Зав. кафедрой Антипина Н.М.

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Учебная дисциплина

Математические методы в историческом исследовании

Направление подготовки

46.03.01 История

Профиль:

Исторические науки

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Мытищи
2021

1. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
ОПК-1 Способен осуществлять отбор, критический анализ и интерпретацию исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач в сфере своей профессиональной деятельности.	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 1-12). 2. Самостоятельная работа (Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы. Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля.).
ОПК-5 Способен применять современные информационно-коммуникационные технологии для решения исследовательских и практических задач профессиональной деятельности.	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 1-12). 2. Самостоятельная работа (Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы. Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля.).

1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
ОПК-1	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 3-12). 2. Самостоятельная работа (Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы.	Знать: основные методы поиска и анализа исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач, поставленных в ходе исторического исследования. Уметь: работать в прикладных программах, позволяющих проводить анализ	Контроль работы, тестовый контроль, самостоятельная работа, освоение статистических пакетов, экзамен.	41-100 баллов

		Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля).	количественных характеристик исторических явлений, создавать модели исторических явлений.		
	Продвину тый	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 3-12). 2. Самостоятельная работа (Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы. Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля).	Знать: основные методы поиска и анализа исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач, поставленных в ходе исторического исследования. Уметь: работать в прикладных программах, позволяющих проводить анализ количественных характеристик исторических явлений, создавать модели исторических явлений. Владеть: методами историко-статистического анализа, методами математического моделирования исторических явлений и их качественной интерпретации.	Контроль ные работы, тестовый контроль, самостоятельная работа, освоение статистических пакетов, экзамен.	61-100 баллов
ОПК-5	Порогов ый	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 3-12). 2. Самостоятельная работа	Знать: основные методы и приёмы применения ИКТ и программных средств для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности	Контроль ные работы, тестовый контроль, самостоятельная работа, освоение	41-60 баллов

		(Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы. Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля).	историка. Уметь: работать в прикладных программах и сетевых ресурсах для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка.	статистических пакетов, экзамен.	
	Продвину- тый	1. Работа на учебных занятиях (лекции, практические занятия) (Темы 3-12). 2. Самостоятельная работа (Проработка конспекта лекций. Изучение основной и дополнительной рекомендованной учебно-методической литературы. Выполнение домашних заданий. Подготовка ответов на вопросы самоконтроля).	Знать: основные методы и приёмы применения ИКТ и программных средств для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка. Уметь: работать в прикладных программах и сетевых ресурсах для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка. Владеть: методами анализа исторической информации, моделирования исторических явлений, интерполяции и экстраполяции результатов исторического исследования с помощью ИКТ и прикладных программ.	Контроль- ные работы, тестовый контроль, самостоятельная работа, освоение статистических пакетов, экзамен.	61— 100 баллов

1.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Варианты тестов на контроль умений и навыков использования ИКТ в обработке и анализе исторических статистических данных

1. Выберите правильную последовательность заполнения базы данных и построения диаграмм на ее основе в электронной таблице Microsoft Excel.

1. *Форматирование областей диаграммы.*
2. *Активизация Мастера диаграмм.*
3. *Обозначение строк и столбцов.*
4. *Заполнение ячеек числовыми значениями.*
5. *Форматирование ячеек полученной матрицы.*
6. *Выделение диапазона ячеек для построения диаграммы.*
7. *Выбор типа диаграммы.*

а) 3→1→6→4→2→7→5

б) 3→5→4→6→2→7→1

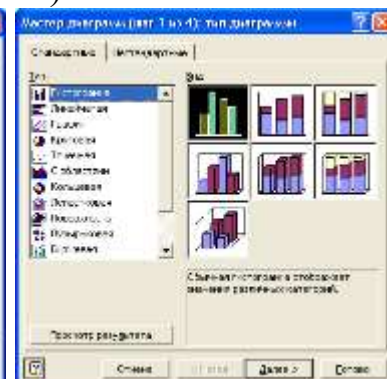
в) 7→2→4→1→5→3→6

2. Исключите диалоговое окно Microsoft Excel, не относящееся к алгоритму заполнения базы данных и построения диаграмм на ее основе.

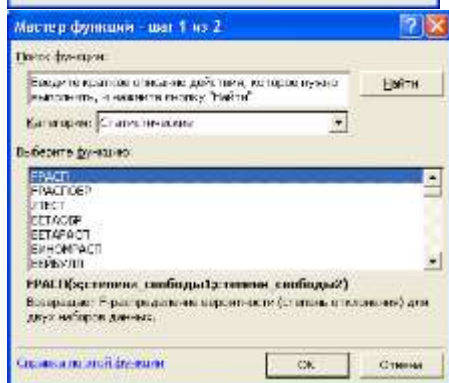
а)



б)



в)



3. Выберите функцию Microsoft Excel, которая оценивает производную от дисперсии величину по выборке (логические значения и текст игнорируются):

а) СЧЕТ;

- б) СТАНДОТКЛОН;
 - в) ВЕРОЯТНОСТЬ.
- 4. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает порядковый номер числа относительно других чисел в списке:
 - а) РАНГ;
 - б) ФРАСП;
 - в) ZТЕСТ.
- 5. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает значение квадратного корня:
 - а) СЧЕТ;
 - б) КВАДРОТКЛ;
 - в) КОРЕНЬ.
- 6. Выберите функцию Microsoft Excel, которая оценивает отклонение частных значений от средней величины по выборке (логические значения и текст игнорируются):
 - а) ДИСП;
 - б) СТАНДОТКЛОН;
 - в) РАНГ.
- 7. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает эксцесс множества данных:
 - а) СКОС;
 - б) СТАНДОТКЛОН;
 - в) ЭКСЦЕСС.
- 8. Выберите функцию Microsoft Excel, возвращающую среднее арифметическое своих аргументов, которые могут быть числами или именами, массивами или ссылками на ячейки с числами:
 - а) СРЗНАЧ;
 - б) СТАНДОТКЛОН;
 - в) СРОТКЛ.
- 9. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает коэффициент r линейной корреляции:
 - а) КОРРЕЛ;
 - б) ПИРСОН;
 - в) ПУАССОН.
- 10. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает асимметрию распределения:
 - а) СРЗНАЧ;
 - б) СКОС;
 - в) ЭКСЦЕСС.
- 11. Выберите функцию Microsoft Excel, которая возвращает коэффициент ранговой корреляции между двумя множествами данных.
 - а) КВАРТИЛЬ;
 - б) ПИРСОН;
 - в) КОРРЕЛ.
- 12. Выберите правильный вариант записи формулы эксцесса критического.

$$E_{кр} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}}$$

а) =5*КОРЕНЬ(24*n*(n-1)*(n-3)/СТЕПЕНЬ(n+1;2)*(n+3)*(n+5))

б) 5*КОРЕНЬ((24*n*(n-1)*(n-3))/(СТЕПЕНЬ(n+1;2)*(n+3)*(n+5)))

в) =5*КОРЕНЬ((24*n*(n-1)*(n-3))/(СТЕПЕНЬ(n+1;2)*(n+3)*(n+5)))

13. Выберите правильный вариант записи формулы углового преобразования Фишера.

$$v^* = (v_1 - v_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \quad (\text{если } v_1 \text{ — это } A1; v_2 \text{ — это } B1)$$

а) =КОРЕНЬ((n1*n2)/(n1+n2))

б) =(A1:B1)*КОРЕНЬ((n1*n2)/(n1+n2))

в) =A1:B1*КОРЕНЬ(n1*n2)/(n1+n2)

14. Выберите правильный вариант записи формулы одинаковых рангов.

$T_a = \Sigma(a^3 - a) / 12$ (при двух группах одинаковых рангов).

а) =(СТЕПЕНЬ(a;3)-a)+(СТЕПЕНЬ(a;3)-a)/12

б) =((СТЕПЕНЬ(a;3)-a)+(СТЕПЕНЬ(a;3)-a))/12

в) =СУММ(СТЕПЕНЬ(a;3)-a)/12

15. Выберите правильный вариант записи формулы асимметрии критической.

$$4. A_{кр} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}}$$

а) =3*КОРЕНЬ((6*(n-1))/((n+1)*(n+3)))

б) =3*(КОРЕНЬ((6*(n-1))/((n+1)*(n+3)))

в) =3*КОРЕНЬ((6*(A1:A15-1))/((A1:A15+1)*(A1:A15+3)))

16. Выберите правильный вариант записи формулы ранговой корреляции.

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \Sigma(d^2) + T_a + T_b}{N \cdot (N^2 - 1)} \quad \text{если значения } d^2 \text{ находятся в диапазоне ячеек G3:G17}$$

а) =1-(((6*СУММ(G3:G17)+T_a+T_b)/(N*(КВАДРАТ(N;2)-1)))

б) =1-(((6*СУММ(G3:G17)+T_a+T_b)/(N*(СТЕПЕНЬ(N;2)-1)))

в) =1-(((6*СУММ(G3:G17)*СУММ(T_a+T_b)/(N*(СТЕПЕНЬ(N;2)-1)))

17. Критериями, включающими в формулу расчета параметры распределения, называют:

а) все статистические критерии;

б) параметрические критерии;

в) непараметрические критерии

18. Гипотеза о значимости различий — это:

а) нулевая гипотеза;

б) направленная гипотеза;

в) альтернативная гипотеза.

19. Гипотеза, с помощью которой требуется доказать, что в одной группе испытуемых под влиянием каких-либо экспериментальных воздействий

произошли более выраженные изменения, чем в другой группе — это:

- а) ненаправленная гипотеза;
- б) направленная гипотеза;
- в) нулевая гипотеза.

20. Числовыми характеристиками, указывающими, где «в среднем» располагаются значения признака, на сколько эти значения изменчивы и наблюдается ли преимущественное появление определенных значений признака, называют:

- а) параметрические критерии;
- б) непараметрические критерии;
- в) параметры распределения.

21. Определяющее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью — это:

- а) критерий;
- б) алгоритм;
- в) альтернативная гипотеза.

22. Вероятность того, что различия считаются существенными, будучи на самом деле случайными — это:

- а) уровень статистической значимости;
- б) критерий;
- в) гипотеза.

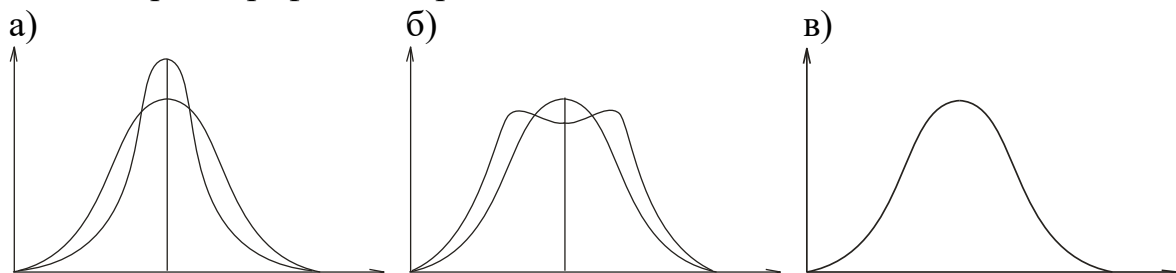
23. Гипотеза об отсутствии различий — это:

- а) альтернативная гипотеза;
- б) ненаправленная гипотеза;
- в) нулевая гипотеза.

24. Гипотеза, с помощью которой нужно доказать, что различаются формы распределения одного и того же признака в двух группах испытуемых.

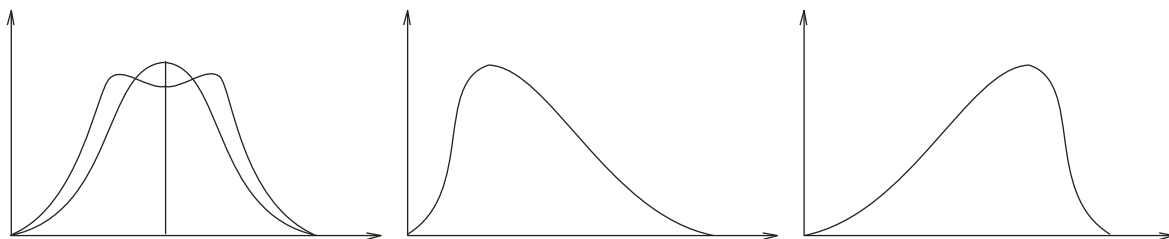
- а) нулевая гипотеза;
- б) ненаправленная гипотеза;
- в) направленная гипотеза.

25. Выберите график, отображающий положительный эксцесс:

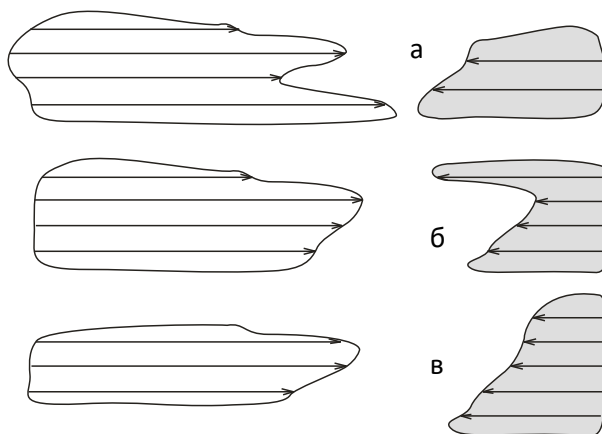


26. Выберите график, отображающий отрицательную асимметрию:

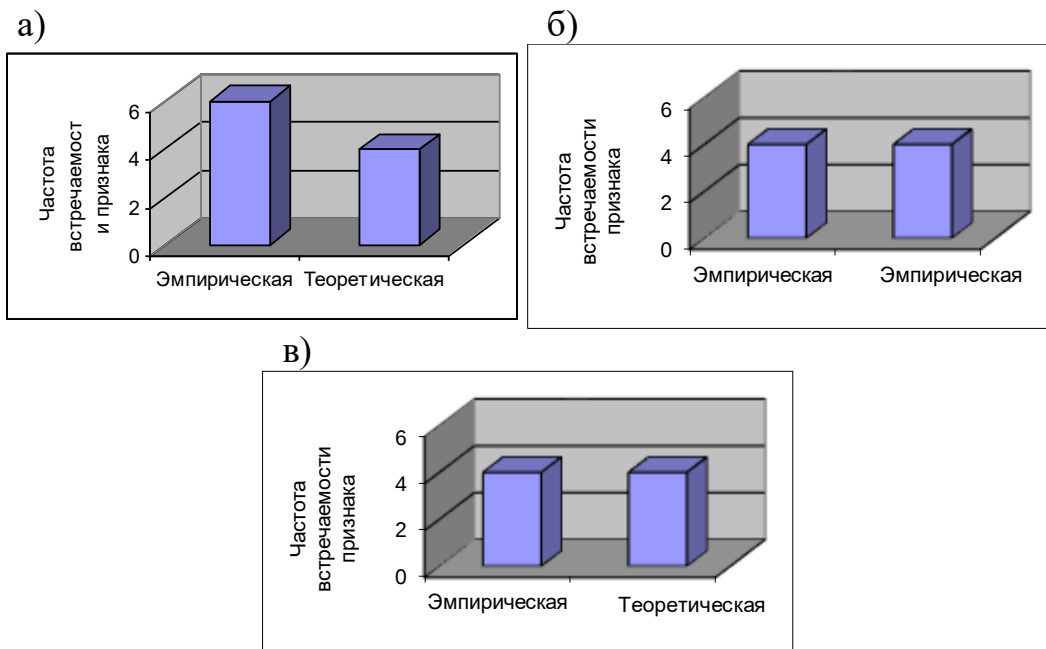
- а)
- б)
- в)



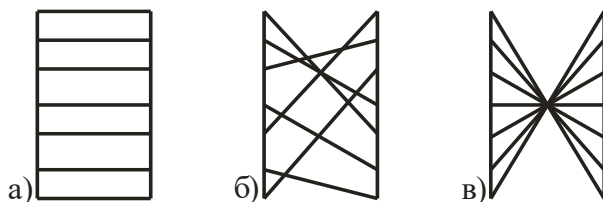
27. Т-критерий Вилкоксона. На каком графике типичное направление сдвигов преобладает над нетипичным и по количеству и по интенсивности:



28. Исключите график, не отражающий бинаминальный критерий m.



29. Выберите график, отображающий нулевую корреляцию.



31. Выберите правильную последовательность этапов вывода и анализа элементарных статистик в SPSS..

1. Построение графиков, по данным таблиц файла Output.
2. Заполнение файла данных.
3. Открытие диалогового окна Частоты и заполнение поля Переменная.
4. Активизация опций Среднее значение, Стандартное отклонение и т.д. в дополнительном диалоговом окне Статистика.
5. Активизация меню Анализировать → Описательные Статистики.
6. Анализ результатов в файле Output.

а) 5→2→3→1→6→4

б) 1→5→2→4→3→6

в) 2→5→3→4→6→1

32. Выберите правильную последовательность этапов расчета Т-критерия Вилкоксона в SPSS.

1. Активизация диалогового окна 2 Зависимые выборки.
2. Выделение пар переменных в поле тестируемых переменных и перенесение их в Поле тестовых пар.
3. Выбор меню Анализировать.
4. Активизация опции Непараметрические тесты.
5. Выбор теста Вилкоксона.
6. Анализ данных в файле Output.

а) 3→4→1→5→2→6

б) 4→3→6→2→5→1

в) 1→4→2→5→3→6

33. Выберите правильную последовательность этапов расчета углового преобразования Фишера ϕ^* в SPSS.

1. Активируется опции Описательные статистики.
2. На основе частотных таблиц заполняется лист Data View, где в первой колонке кодируются экспериментальная и среднестатистическая (вторая экспериментальная) группы по частоте встречаемости исследуемого признака, а во вторую колонку заносятся соответствующие значения признака.
3. Открывается дополнительное диалоговое окно Статистика.
4. В поле Строки вносится первая переменная, в поле Колонки — вторая переменная.
5. Выбирается меню Анализировать.
6. Проводится анализ данных в файле Output.
7. Выбирается тест Фи (Phi).

8. Открывается диалогового окна *Перекрестные таблицы*.
- а) 7→5→4→6→1→3→2→8;
 - б) 1→3→5→2→6→8→7→4;
 - в) 2→5→1→8→4→3→7→6.
34. Выберите правильную последовательность этапов проведения ранговой корреляции в SPSS.
- 1. *Открытие диалогового окна Одновариантность*.
 - 2. *Ввод ранговых переменных в поле переменных*.
 - 3. *Заполнение файла Data View*.
 - 4. *Выбор меню Transform (Трансформировать)*.
 - 5. *Активизация команды Rank Cases (Ранг регистров)*.
 - 6. *Анализ данных в файле Output*.
 - 7. *Выбор меню Анализировать*.
 - 8. *Активизация функции Correlate (Согласование)*.
 - 9. *Выбор метода корреляции Спирмена*.
- а) 1→4→5→6→3→7→9→2→8;
 - б) 3→4→5→7→8→1→2→9→6;
 - в) 9→2→5→4→8→1→7→3→6.
35. Выберите правильную последовательность проведения факторного анализа в SPSS.
- 1. *Активизация опции Scree plot (Точечная диаграмма)*.
 - 2. *Выбор меню Анализировать*.
 - 3. *Анализ данных в файле Output*.
 - 4. *Активизация команды Data Reduction (Уменьшение данных)*.
 - 5. *Выбор опций Sorted by size (Сортировка по размеру) и Suppress absolute values less than (Подавить абсолютные величины меньше, чем...) в окне Options (Параметры)*.
 - 6. *Выбор метода варимакса в дополнительном диалоговом окне Rotation (Вращение)*.
 - 7. *Открытие диалогового окна Factor (Фактор)*.
 - 8. *Открытие дополнительного диалогового окна Extraction (Извлечение) и обозначение в нем количества показателей*.
 - 9. *Ввод ранговых переменных в поле тестируемых переменных*.
 - 10. *Отключение опции отображения Unrotated factor solution (Неповернутое факторное решение)*.
- а) 2→4→7→9→8→10→1→6→5→3;
 - б) 10→8→7→9→4→1→2→5→6→3;
 - в) 8→9→4→7→1→10→3→6→2→5.

Контрольные работы

Примеры заданий к контрольной работе по теме «Основы теории вероятностей»

1. В коробке содержится 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

2. В ящике содержится 12 деталей завода №1, 20 деталей завода №2, 18 деталей завода №3. Вероятность того, что деталь завода №1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов №2 и №3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.
3. Бросают три игральных кубика. Составить закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех кубиках. Построить многоугольник распределения.
4. Дано распределение дискретной случайной величины:

x_i	4	6	8	12
p_i	0,3	0,1	0,3	0,3

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

5. Масса вагона — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0,9$ т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т, но не менее 60 т.

Примеры заданий к контрольной работе по теме

«Статистические показатели и анализ частотных распределений»

Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) сгруппируйте их по:

- а) числу рабочих;
- б) мощности двигателей;
- в) объему производства.

В какую группу попадает наибольшая доля предприятий?

Постройте гистограммы и кумуляты. Объясните значения кумулятивных частот.

2. Найдите среднюю численность рабочих на предприятиях, стандартное отклонение и коэффициент вариации. Сделайте выводы.
3. Выберите из базы предприятия, численность рабочих на которых колеблется в интервале [100; 1000]. Сгруппируйте предприятия по числу рабочих, используя начальный интервальный шаг 15 и константу геометрической прогрессии 2. (Последний интервал сделайте открытым). По получившемуся ряду найдите среднюю численность рабочих, медиану, стандартное отклонение и коэффициент вариации. Сделайте выводы.
4. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906», ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) исследуйте возрастной состав депутатов. Для этого:
 - сформируйте пять равноинтервальных возрастных групп;
 - используя правило «трех сигм», проверьте получившийся вариационный ряд на соответствие нормальному закону распределения.
 - найдите теоретические частоты;

- нарисуйте график эмпирического и теоретического распределения, сделайте выводы;
- подтвердите полученные результаты с помощью критерия согласия Пирсона.
- постройте диаграммы по национальному, образовательному, сословному, фракционному составам Думы. Попытайтесь проследить некоторые зависимости, сделайте выводы.

Примеры заданий к контрольной работе
по теме «Выборочный метод»

1. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>):
 - сформируйте механическую 10%-ую выборку предприятий по числу рабочих;
 - определите доверительный интервал средней численности рабочих на предприятии, гарантируя результат с вероятностью 0,95;
 - определите, какое количество предприятий надо проанализировать, чтобы с вероятностью 0,997 предельная ошибка численности рабочих не превышала 10 человек.
2. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906» ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), рассчитать величину доверительного интервала для среднего возраста депутатов I Государственной думы, исходя из предположения, что мы имеем сведения только для:
 - 200 человек;
 - 300 человек.
3. Из генеральной совокупности 1000 тыс. крестьянских хозяйств отобраны 100 хозяйств. Оказалось, что 10 хозяйств используют наемный труд. С вероятностью 0,95 определить долю таких хозяйств в генеральной совокупности.

Примеры заданий к контрольной работе по темам
«Анализ взаимосвязей в исторических явлениях и процессах» и
«Регрессионные модели в историческом исследовании»

1. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>):
 - постройте две диаграммы рассеяния для переменных: 1) «произведено» и «рабочие», 2) «произведено» и «двигатели» по одной из отраслей промышленности;
 - сравните полученные диаграммы, сделайте вывод о тесноте и направленности связи.
2. Используя данные (см. пункт 1):

- найдите линейные коэффициенты корреляции и коэффициенты детерминации для зависимости объема производства от числа рабочих и суммарной мощности двигателей по одной из отраслей;
- проверьте значимость коэффициентов;
- постройте доверительные интервалы коэффициента вариации для всей отрасли, сделайте выводы.

3. Используя данные (см. пункт 1):

- постройте множественную регрессионную модель зависимости объема производства от числа рабочих и суммарной мощности двигателей по одной из отраслей;
- проверьте значимость каждого коэффициента регрессии;
- проверьте факторы на мультиколлинеарность;
- если факторы неколлинеарны, вычислите множественный коэффициент корреляции, в обратном случае — скорректируйте регрессионную модель;
- проверьте значимость множественного коэффициента корреляции;
- проверьте адекватность всей модели регрессии, интерпретируйте результаты.

4. По данным таблицы «Участники революционного движения в России во второй половине XIX в.» вычислите ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла.

Категория	% участников
Возраст	
До 20 лет	37,00
21-25	45,20
26-30	12,50
31-35	2,80
36-40	1,40
41-45	1,00
46-50	0,07
Более 50	0,03
Сословие	
Дворяне	30,00
Духовенство	22,00
Почетные граждане	9,00
Купцы	6,00
Военные (недворяне)	5,00
Мещане	14,00
Крестьяне	5,00

5. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906» ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), постройте таблицы сопряженности для:

- уровня образования и партийной принадлежности;
- профиля образования и партийной принадлежности;
- профиля образования и сословного происхождения.

Объясните, насколько значимо в каждом случае отклонение реальных частот парной встречаемости от ожидаемых.

6. Используя данных (см. пункт 5), построить график распределения частот парной встречаемости для переменных:

- уровень образования и партийная принадлежность;
- профиль образования и партийная принадлежность;

Примеры заданий к контрольной работе
по теме «Кластерный анализ»

1. Классифицировать на два и три класса с помощью метода k -средних данные о результатах голосования за основные политические партии на выборах 1917 г. в Учредительное собрание по избирательным округам (файл Uchred.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Сравнить полученные результаты.
2. Классифицировать эти же данные, пользуясь агломеративно-иерархическим методом. Какой из методов дает лучшие результаты.
3. Используя файл Tambov.sta (URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), классифицировать уезды Тамбовской губернии:
 - а) по данным социально-экономического характера;
 - б) по данным о числе голосов, поданных за различные политические партии на выборах в Учредительное собрание.

Выяснить степень сходства полученных результатов по дендрограммам.

4. Постройте классификацию стран мира по данным демографической статистики (файл Demo_wor.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Предварительно стандартизируйте исходные данные.
5. Постройте классификацию республик СССР по данным о среднем числе членов семьи (файл Family.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>).

Примеры заданий к контрольной работе по теме «Факторный анализ»

1. Используя данные статистического сборника С.И. Гулишамбаров «Сравнительная статистика России в Мировом Хозяйстве и в ряду Великих Держав в первое десятилетие царствования императора Николая II 1894-1904 гг.» статья «Живой инвентарь, паровые двигатели, пути и средства сообщения» (URL: http://istmat.info/files/uploads/22542/sravnit_har-ka_ii.pdf):
 - составьте сводную таблицу основных инфраструктурных единиц на 1904 год;
 - проведите факторный анализ, выявите факторные нагрузки и проанализируйте факторные веса;
 - постройте графики распределения объектов в пространствах выявленных факторов; сделать выводы.

2. Проведите факторный анализ, используя данные таблицы «Характеристика 20 стран на 2012 год» (URL: <http://www.ereport.ru/stat.php?count=G20>). Охарактеризуйте полученные факторы и опишите их влияние на объекты. Постройте графики распределения объектов в пространстве выявленных факторов. Сделать выводы.

Страны	Население, млн. человек	Размер реального ВВП, млрд. долларов США	Размер ВВП на душу населения, тыс. долл. США	Инфляция, %	Уровень безработицы, %	Торговый баланс, млрд. долларов США
Австралия	22.0	1542.0	70.1	2.1	5.2	24.2
Аргентина	42.2	474.8	11.3	25.0	7.2	18.1
Бразилия	205.7	2425.0	11.8	5.5	6.2	3.2
Великобритания	63.0	2434.0	38.6	2.8	7.8	-165.0
Германия	81.3	3367.0	41.4	2.0	6.5	216.0
Индия	1205.1	1947.0	1.6	9.2	9.9	-191.2
Индонезия	248.2	894.9	3.6	4.5	6.1	9.7
Италия	61.3	1980.0	32.3	3.0	10.9	13.6
Канада	34.3	1770.0	51.6	1.8	7.3	0.8
Китай	1343.2	8250.0	6.1	2.6	6.4	233.0
Мексика	115.0	1163.0	10.1	3.6	5.0	-8.5
Россия	143.0	1954.0	13.7	5.1	5.7	195.3
Саудовская Аравия	26.5	657.0	24.8	4.6	10.7	244.7
США	313.8	15650.0	49.9	2.0	8.2	-745.0
Турция	79.7	783.1	9.8	9.1	9.0	-71.4
Франция	65.6	2580.0	39.3	1.3	10.3	-91.4
ЮАР	48.8	390.9	8.0	5.2	22.7	-5.6
Южная Корея	48.9	1151.0	23.5	2.2	3.2	38.4
Япония	127.4	5984.0	47.0	0.1	4.4	-64.0

Примеры заданий к контрольной работе
по теме «Анализ рядов динамики»

1. Используйте данные представленные в таблицах «Валовая добыча угля в Западной Сибири (URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) и «Динамика курса рубля в 1993 году»

1993	Официальный курс рубля (на конец периода), руб. за 1 доллар США
Январь	572
Февраль	593
Март	684
Апрель	823
Май	994
Июнь	1060
Июль	990

Август	993
Сентябрь	1169
Октябрь	1186
Ноябрь	1231
Декабрь	1247

- охарактеризуйте скорость и интенсивность изменений в рядах динамики;
- найдите средние показатели рядов;
- определите наличие тенденции развития (среднего уровня / дисперсии / автокорреляции);
- докажите (в случае наличия) статистическую значимость тренда;
- охарактеризуйте трендовую составляющую рядов с помощью средних показателей, методом 3-хчленной скользящей средней, методом аналитического выравнивания; проверьте и докажите адекватность выбранной модели;
- сделайте выводы.

2. Выявите закономерную составляющую в поведении урожайности зерновых культур в СССР (файл Harvest2.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Проведите анализ остатков. Интерпретируйте полученные результаты.

Примеры заданий к контрольной работе

по теме «Анализ структуры исторических явлений»

1. Используя данные представленные в таблице «Племенной состав иммигрировавших в США уроженцев России за период 1901—1911 (URL: http://www.hist.msu.ru/Dynamics/01_dem.htm), проанализируйте национальную структуру эмигрантов из России и структурные сдвиги, произошедшие за период 1901—1911 гг.

Племенной состав иммигрировавших в США уроженцев России за период 1901-1911									
Года	Русские	Поляки	Литовцы	Немцы	Шведы, датч., норв.	Финны	Евреи	Прочие	Итого
1901	667	21 475	8 805	5 643	1 025	9 966	37 660	16	85 257
1902	1 536	33 859	9 975	8 542	1 727	13 854	37 846	8	107 347
1903	3 589	39 548	14 420	10 485	1 571	18 776	47 689	15	136 093
1904	4 080	32 577	12 707	7 128	871	10 077	77 544	157	145 141
1905	3 456	47 224	17 649	6 722	690	16 671	92 388	97	184 897
1906	5 541	46 204	13 697	10 279	937	13 461	125 234	312	215 665
1907	16 235	73 122	24 811	13 480	1 416	14 311	114 932	636	258 943
1908	16 361	37 947	13 270	10 009	527	6 303	71 978	316	156 711
1909	9 169	37 770	14 595	7 781	591	11 202	39 150	202	120 460
1910	14 870	63 635	21 676	10 016	1 398	14 999	59 824	374	186 792
1911	17 777	40 193	16 210	8 779	730	8 942	65 472	618	158 721

Русские - включая русских из Австрии (ruthenians, russniaks), которых американцы по австрийскому обычаю отделяют от русских России
--

Литовцы - вероятно, включая латышей

Определите:

- удельный вес каждой национальности по годам;
- средний удельный вес национальностей за весь период;
- «абсолютный» прирост удельного веса каждой национальности;
- средний «абсолютный» прирост удельного веса каждой национальности;
- темп роста удельного веса каждой национальности по годам;
- средний темп роста удельного веса каждой национальности за весь период;
- квадратические коэффициенты «абсолютных» и относительных структурных сдвигов.

Сделайте выводы о подвижности / стабильности национального состава эмигрантов в рассматриваемый период.

2. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) определите степень концентрации рабочих ресурсов по предприятиям, нарисуйте кривую концентрации, сделайте выводы.

3. Используя в качестве исходного материала данные базы «Динамика российской промышленности за 1887—1913 гг.» ([Электронный ресурс — URL: www.hist.msu.ru/Labs/Ecohist/DBASES/INDUSTRY/index.htm]) определите степень централизации стоимости валовой продукции, выпускаемой различными отраслями хозяйства в 1887 и 1913 году, сравните показатели, сделайте выводы.

Материалы для самостоятельной работы

Тема: Матрицы и определители

Цель занятия - научиться вычислять определители произвольного порядка, научиться работать с матрицами (умножать на число, складывать, умножать матрицу на матрицу), освоить свойства матриц и определителей и свободно применять их при решении задач и примеров.

Вопросы:

1. Понятие матрицы
2. Виды матриц
3. Действия над матрицами
4. Определители матрицы
5. Свойства определителей
6. Методы вычисления определителей 2 и 3 порядков.
7. Миноры и алгебраические дополнения
8. Теорема Лапласа для вычисления определителей произвольного

порядка.

9. Решение задач

Методические рекомендации.

Пусть даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

матрицы складываются поэлементно, поэтому суммой матриц А и В будет матрица $C=A+B$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 5 & 10 & 8 \\ 9 & -6 & 12 \end{pmatrix};$$

чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число, в результате умножения элементов матрицы А на число 4 получится матрица D

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 20 \\ 8 & 12 & 16 \\ 32 & -4 & 16 \end{pmatrix};$$

чтобы умножить матрицу А на В, надо каждую строку матрицы А умножить соответственно на элементы столбцов и результаты перемножить, в итоге получится матрица $C = (c_{ij})$:

$$c_{11} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 0;$$

аналогично получаются остальные элементы матрицы С.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -29 & 45 \\ 3 & 7 & 52 \\ -15 & -3 & 86 \end{pmatrix};$$

Тема: Обратная матрица и ее вычисление

Цель занятия – научиться вычислять ранг матрицы и находить обратную матрицу, решать экономические задачи приводящие к рассмотрению матричных уравнений.

Вопросы:

1. Обратная матрица
2. Применение матриц в экономике
3. Решение задач

Методические рекомендации.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу, обратную данной. Сделать проверку.

$|A| = 2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы А.

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = 1, \quad A_{22} = 1.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{|A|} A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

2. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$a_{12}^{-1} = \frac{1}{4} A_{21} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда

$$a_{31}^{-1} = \frac{1}{4} A_{13} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -6, \quad A_{13} = 3, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1, \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = -4.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} (A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Тема: Системы n линейных уравнений с n неизвестными

Цель занятия – научиться решать системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Вопросы:

1. Основные понятия и определения (Системы совместные, несовместные, однородные, неоднородные, неопределенные)
2. Теорема Кронекера-Капелли для исследования системы уравнений.
3. Решение задач

Методические рекомендации.

Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1,$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0.$$

Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что, например, минор второго порядка в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0;$$

содержащие его миноры третьего порядка равны нулю:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M''_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен 2, т.е. $r(A) = 2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы $\bar{A}$ рассмотрим окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

значит, ранг расширенной матрицы $r(\bar{A}) = 3$. Поскольку $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

Тема: Линейные пространства.

Цель занятия – научиться строить точки и линии в координатной системе координат на плоскости, уметь находить расстояние между двумя точками. Знать действия над векторами.

Вопросы:

1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости
2. Расстояние между двумя точками
3. Деление отрезка в данном отношении
4. Применение определителя для вычисления площади треугольника
5. Векторы и действия над векторами
6. Решение задач

Методические рекомендации.

Умножение вектора на число.

$\frac{1}{2}\vec{a}$ есть вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, и имеющий длину, вдвое меньшую, чем вектор $\vec{a}$

Сложение, разность векторов

1. Заданы точки $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; -1)$. Найти вектор $\overrightarrow{BA}$.
 $\overrightarrow{BA} = (1, -2, 3) - (2, 0, -1) = (-1, -2, 4)$.

2. Даны $A(-2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(0; 1; 1)$. Найти $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (2; -2; 0).$$

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2, -2, -2) + (2, -2, 0) = (4, -4, -2).$$

3. Известно, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. Найти координаты точки D , если

$$D(x, y, z). \quad \overrightarrow{CA} = (6; 1; -5), \quad \overrightarrow{CB} = (-1; 9; 3), \quad \overrightarrow{CD} = (x+3, y+5, z-4)$$

Пусть $A(3; -4; -1)$, $B(-4; 4; 1)$, $C(-3; -5; 4)$ тогда

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (5; 10; -8)$$

Следовательно, должно выполняться равенство $(x+3; y+5; z-4)=(5;10;-8)$.
Отсюда $x=2, y=5, z=-4$, т.е. точка D имеет координаты $D(2; 5; -4)$.

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ.$$

Скалярное произведение векторов

Дан вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Известно, что

$$\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = \sqrt{\vec{c}^2}$$

Найти $|\vec{c}|$.

Найдем:

$$\vec{c}^2 = (2\vec{a} + 3\vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}; \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2 = 64 + 72 + 81 = 217$$

$$\text{Следовательно, } |\vec{c}| = \sqrt{217}$$

Условие ортогональности

1.

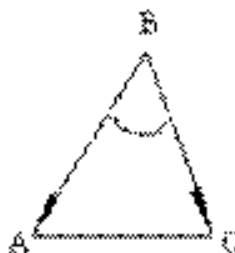
$$\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$$

Пусть $A(-1; 1; 0), B(3; 1; -2)$,

Найти:

$$\vec{a} \cdot \vec{b};$$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos \varphi.$$



$$\vec{a} = (4; 0; -2), \vec{a} \cdot \vec{b} = 8 + 6 = 14.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}, |\vec{b}| = \sqrt{13}.$$

$$\cos \varphi = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

2. Найти $\angle B$ в $\triangle ABC$, если известны координаты его вершин $A(1; 5; 6), B(5; 3; 10), C(2; 1; 14)$.

$$\angle B = (\vec{BA}; \vec{BC})$$

$$\vec{BA} = (-4; 2; -4), \vec{BC} = (-3; -2; 4), |\vec{BA}| = 6, |\vec{BC}| = 29$$

$$|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| = 12 - 4 - 16 = -8.$$

$$\cos \varphi = \frac{-8}{6\sqrt{29}} = -\frac{4}{3\sqrt{29}}, \varphi = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{29}}\right) = 104^\circ.$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}, \vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

При каком значении m векторы перпендикулярны?

Условие ортогональности двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2m - 15 - m = m - 15 = 0.$$

Следовательно, $m = 15$.

Тема: Прямые линии на плоскости.

Цель занятия - научиться решать задачи, где рассматриваются различные виды уравнений прямой. Уметь выполнять действия с векторами. Уметь применять формулы скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

Вопросы:

1. Уравнение линии на плоскости
2. Угловой коэффициент прямой
3. Виды уравнений прямой
4. Угол между двумя прямыми
5. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых
6. Расстояние от точки до прямой
7. Решение задач

Методические рекомендации.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$.

Используя выведенное уравнение, получим $2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0$ или $x+2z-7=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(-1;0;0)$, $C(3;0;1)$.
Чтобы составить требуемое уравнение, нужно найти вектор перпендикулярный плоскости. Заметим, что таким вектором будет вектор

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Найдем это вектор.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -3), \quad \overrightarrow{AC} = (2; -2; -2).$$

Тогда

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 10\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Взяв в качестве точки, через которую проходит плоскость точку A , получим уравнение $-2(x-1)-10(y-2)+8(z-3)=0$ или $x+5y-4z+1=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ параллельно плоскости yOz (перпендикулярно оси Ox).

Так как $yOz \parallel \alpha$, то уравнение плоскости будет $Ax+D=0$. С другой стороны $M \in \alpha$, поэтому $2A+D=0$, $D=-2A$. Поэтому плоскость имеет уравнение $x-2=0$.

4. Определить угол между плоскостями $x+2y-3z+4=0$ и $2x+3y+z+8=0$.

$$\cos \varphi = \frac{2+6-3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{14} \Rightarrow \varphi \approx 69^\circ.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 1; 4)$ параллельно плоскости $3x+2y-7z+8=0$.

Уравнение плоскости будем искать в виде $Ax+By+Cz+D=0$.

Из условия параллельности плоскостей следует, что:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-7}.$$

Поэтому можно положить $A=3$, $B=2$, $C=-7$.

Поэтому уравнение плоскости принимает вид $3x+2y-7z+D=0$.

Кроме того, так как $M \in \alpha$, то $-6+2-28+D=0$, $D=32$.

Итак, искомое уравнение $3x+2y-7z+32=0$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+z=0$.

Так как $M_1 \in \alpha$, то используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, будем иметь $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$.

Далее, так как $M_2 \in \alpha$, то подставив координаты точки в выписанное уравнение, получим равенство $-A-2C=0$ или $A+2C=0$.

Учтем, что заданная плоскость перпендикулярна искомой. Поэтому $A+B+C=0$.

Выразим коэффициенты A и B через C : $A=-2C$, $B=C$ и подставим их в исходное уравнение: $-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0$.

Окончательно получаем $-2x+y+z=0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 3; 6)$ перпендикулярно плоскостям $2x+3y-2z-4=0$ и $3x+5y+z=0$.

Так как $M \in \alpha$, то $A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0$.

По условию задачи $\alpha \perp \alpha_1$, $\alpha \perp \alpha_2$, поэтому

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0, \\ 3A+5B+C=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+3B=2C, \\ 3A+5B=-C. \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+3B=2C, \\ B=-8C. \end{cases} \quad A=13C.$$

Итак уравнение плоскости принимает вид

$$13(x+2)-8(y-3)+z-6=0 \text{ или } 13x-8y+z+44=0.$$

Записать уравнение прямой в параметрическом виде.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Обозначим

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} = t,$$

отсюда $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 1 - t$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{0}$$

Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку

$M_1(1;0;-2)$ параллельно вектору $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

Канонические уравнения: .

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = -3t, \\ z = -2. \end{cases}$$

Найти угол между прямыми и

$$\vec{s}_1 = (1; -4; 1), \quad \vec{s}_2 = (2; -2; 1), \quad \cos \varphi = \frac{2+8+1}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Найти уравнения прямой проходящей через точку $M_1(1;2;3)$ параллельно прямой l_1 :

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0, \\ 3x-4y+z-8=0. \end{cases}$$

Поскольку искомая прямая l параллельна l_1 , то в качестве направляющего вектора искомой прямой l можно взять направляющий вектор прямой l_1 .

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k}. \quad l: \frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{17}.$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$$

Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4;0;2)$ и перпендикулярной

прямым: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$.

Направляющий вектор прямой l можно найти как векторное произведение векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}. \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}.$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;-3;4)$ параллельно прямой

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}.$$

Так как $M_1 \in \alpha$, то уравнение плоскости будем искать в виде

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-4) = 0.$$

Применяя условие параллельности прямой и плоскости, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A+2B+8C=0, \\ 4A+2C=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{15}{2}A, \\ C = -2A, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A=2, \\ B=15, \\ C=-4. \end{cases}$$

Отсюда

$$2x + 15y - 4z + 57 = 0$$

$$\alpha: 2(x-2) + 15(y+3) - 4(z-4) = 0$$

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j}$$

Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x-3y-1=0, \\ z=4. \end{cases}$$

и плоскостью $3x+y+4=0$.

Направляющий вектор прямой.

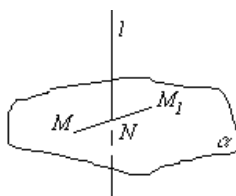
Нормальный вектор.

$$\sin \varphi = \frac{10}{10} = 1, \quad \varphi = 90^\circ.$$

$$\vec{n} = (3, 1, 0)$$

плоскости.

3.



Найдите точку, симметричную данной $M(0;-3;-2)$ относительно прямой

$$\frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1}.$$

Составим уравнение плоскости α перпендикулярной l . $M \hat{=} \alpha$, $\vec{n} = \vec{s} = (0, -1, 1)$.

Следовательно, $\alpha: 0(x-0) - (y+3) + (z+2) = 0$ или $-y + z - 1 = 0$.

Найдём точку пересечения прямой l и α :

$$\begin{cases} \frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1} = t, \\ -y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0.5, \\ y = -t - 1.5, \\ z = t + 1.5, \\ t + 1.5 + t + 1.5 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0.5, \\ y = -0.5, \\ z = 0.5, \\ t = -1. \end{cases}$$

Итак, $N(0.5;-0.5;0.5)$. Пусть искомая точка M_1 имеет координаты $M_1(x,y,z)$. Тогда равенство векторов $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM_1}$, т.е. $(0.5;2.5;2.5) = (x-0.5;y+0.5;z-0.5)$. Откуда $x=1, y=2, z=3$ или $M_1(1;2;3)$.

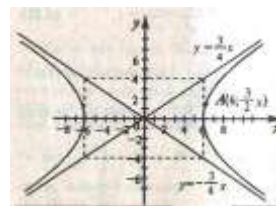
Тема: Кривые второго порядка. Уравнение прямой

Цель занятия – уметь строить кривые второго порядка на плоскости по их уравнениям. Знать канонические уравнения основных кривых второго порядка. Уметь вычислять эксцентриситет и фокальные радиусы кривых второго порядка. Знать основные формулы уравнений прямой и плоскости в пространстве. Уметь решать задачи на уравнение прямой и плоскости в пространстве.

Вопросы:

1. Понятие о кривых второго порядка
2. Окружность
3. Эллипс
4. Гипербола
5. Парабола
6. Прямая система координат в пространстве
7. Координаты вектора в пространстве
8. Скалярное произведение векторов
9. Общее уравнение плоскости
10. Уравнение прямой
11. Решение задач

Методические рекомендации.



Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm \frac{3}{4}x$, проходящими через точку $(6; 3/2)$. Найти расстояние между ее вершинами.

Так как точка $(6; 3/2)$ лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнению

$$\frac{36}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

Кроме того, так как асимптоты гиперболы

$$y = \pm \frac{3}{4}x$$

Решая полученную систему двух уравнений, найдем $a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{2}$, т.е. уравнение

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$$

гиперболы. Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a = 8\sqrt{2}$

Построить кривую $y = -3x^2 + 10x - 3$. Вынося коэффициент при x^2 и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получим

$$y = -3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right] = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

или

$$y - \frac{16}{3} = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2$$

Полагая $x - 5 = x', y - \frac{16}{3} = y'$, получим $y' = -3x'^2$.

Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в точке $O'\left(\frac{5}{3}; \frac{16}{3}\right)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy .

Тема: Пределы

Цель занятия - освоить понятие и определение предела, знать определение и свойства бесконечно малой и бесконечно большой величин. Освоить понятие предела числовой последовательности и функций. Знать свойства пределов, теоремы о пределах. Знать основные теоремы о непрерывных функциях. Уметь раскрывать основные виды неопределенностей.

Вопросы:

1. Числовые последовательности и их виды
2. Предел числовой последовательности
3. Предел функции
4. Основные теоремы о пределах
5. Виды неопределенностей и их раскрытие при вычислении пределов
6. Левосторонние и правосторонние пределы
7. Решение задач

Методические рекомендации.

1. Пусть переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 + 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2}, x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, x_n = 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

Докажем, что предел этой числовой последовательности равен 1. Возьмем произвольное положительное число ε . Нам нужно найти такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Действительно, т.к.

$$|x_n - 1| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n},$$

то для выполнения соотношения $|x_n - a| < \varepsilon$ достаточно, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому,

взяв в качестве N любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{\varepsilon}$,

получим что нужно. Так если взять, например, $\varepsilon = \frac{1}{5}$, то, положив $N=6$, для всех $n > 6$

будем иметь $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{6} < \varepsilon$.

Используя определение предела числовой последовательности, доказать что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - 2n + 1}{2n-1} \right| = \frac{1}{2n-1}.$$

Тогда $\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, если $\frac{1}{2n-1} < \varepsilon$ или $2n-1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$. Поэтому выберем

$$N > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству.

Сделаем несколько замечаний.

I. Неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{2(x-1)(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 6)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x+2} = -2$$

2. При разложении числителя на множители воспользовались правилом деления многочлена на многочлен «углом». Так как число $x=1$ является корнем многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, то при делении получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2+x-9}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x}+3} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \Big| \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 5x^2 + 11x - 6 \\
 \underline{-5x^2 + 5x} \\
 6x - 6 \\
 \underline{-6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{8(\sqrt[3]{x} - 2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 64)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} =$$

$$3. = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x+8)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(x-8)} = \frac{16 \cdot 12}{8} = 24.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = 0$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = 3$$

$\frac{\infty}{\infty}$.

II. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

1. При вычислении предела числитель и знаменатель данной дроби разделили на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3 + x}{x^5 + 3x^3 - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} \right] = \infty$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x - 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{5}{x}} = \left[\frac{0 - \sqrt{2 - 0}}{1 - 0} \right] = -\sqrt{2}$$

4. При вычислении предела воспользовались равенством $\sqrt{x^2} = -x$, если $x < 0$.

1. Следующие виды неопределенностей с помощью алгебраических преобразований функции, стоящей под знаком предела, сводят к одному из

рассмотренных выше случаев $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

2. III. Неопределенность $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos^2 x = 2$$

3.

4. IV. Неопределенность $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}\right)} = \frac{-5}{1+1} = -2,5. \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{1}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-1-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1. \end{aligned}$$

Тема: Производная функции.

Цель занятия - знать определение производной, и ее геометрический, физический, экономический, знать наизусть таблицу производных основных элементарных функций, уметь вычислять производные сложных функций.

Вопросы:

Задачи, приводящие к понятию производной

Определение производной

Геометрический смысл производной

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Основные правила дифференцирования функций

Таблица производных

Решение задач

Методические рекомендации.

1. $y = x^n$. Если n – целое положительное число, то, используя формулу бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + 1/2 \cdot n(n-1) a^{n-2} \cdot b^2 + 1/(2 \cdot 3) \cdot n(n-1)(n-2) a^{n-3} b^3 + \dots + b^n,$$

можно доказать, что

$$y' = nx^{n-1}$$

Итак, если x получает приращение Δx , то $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$, и, следовательно,

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + 1/2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + \Delta x^n.$$

Заметим, что в каждом из пропущенных слагаемых есть множитель Δx в степени выше 3.

Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1}) = n \cdot x^{n-1}$$

Мы доказали эту формулу для $n \in \mathbb{N}$. Далее увидим, что она справедлива и при любом $n \in \mathbb{R}$.

$y = \sin x$. Вновь воспользуемся определением производной.

Так как, $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$, то

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Таким образом, $y' = \cos x$

2. Аналогично можно показать, что $(\cos x)' = -\sin x$

3. Рассмотрим функцию $y = \ln x$.

Имеем $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$.

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln(1 + \frac{\Delta x}{x}).$$

$$\text{Поэтому } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \left| \ln(1^\infty) \right| = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Итак, $y' = \frac{1}{x}$

Используя свойства логарифма можно показать, что $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель занятия - знать определение неопределенного интеграла и его свойства. Научится вычислять неопределенные интегралы методом подстановки

Вопросы:

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Таблица интегралов основных элементарных функций
4. Непосредственное интегрирование
5. Метод замены переменных
6. Решение задач

Методические рекомендации.

1. Найти $\int \frac{dx}{3^x}$

Решение: Учитывая, что $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и используя $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a = \frac{1}{3}$ получим:

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + c = -\frac{1}{3^x \ln 3} + c$$

2. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c, \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x)$

3. $\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin x \cdot d(\sin x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + c, \quad d(\sin x) = \cos x dx.$

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель занятия – научиться вычислять неопределенные интегралы методом интегрирования по частям

Вопросы:

1. Непосредственное интегрирование
2. Метод замены переменных
3. Решение задач

Методические рекомендации.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \int (x^2 + 3)e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 3 & du = 2x dx \\ dv = e^x dx & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + 3)e^x - 2 \int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + 3)e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + 3)e^x - 2x e^x + 2e^x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \int x^2 \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx & v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c
 \end{aligned}$$

Тема: Определенный интеграл

Цель занятия – знать определения и свойства определенного интеграла, знать формулу Ньютона – Лейбница, научиться применять ее при вычислении определенного интеграла.

Вопросы:

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл
2. Свойства определенного интеграла
3. Формула Ньютона – Лейбница
4. Методы вычисления определенного интеграла
5. Решение задач

Методические рекомендации.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \int_0^1 x e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = \\
 &= e^x x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \int_1^4 x \sqrt{2x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2x+1} \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \\ \left| \begin{array}{ll} x & 0 & 4 \\ t & 1 & 3 \end{array} \right| \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{t^2-1}{2} \cdot t \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt - \frac{1}{2} \int_1^3 t^2 dt = \frac{t^4}{10} \Big|_1^3 - \frac{t^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{243}{10} - \frac{1}{10} - \frac{27}{6} + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Тема: Теория вероятностей

Случайные события. Сложные события. Алгебра случайных событий. Определения вероятности. Аксиомы вероятности. Формула полной вероятности. Теорема Бернулли. Условная вероятность. Основные формулы для вероятностей событий, их геометрическая интерпретация. Случайные величины. Системы случайных величин и способы их описания. Теорема Байеса. Вычисление вероятностей гипотез после испытаний. Функция распределения и плотность распределения случайных величин, их свойства. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение. Типичные непрерывные и дискретные распределения. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин, их свойства.

Методические рекомендации

Пример. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что на них в сумме выпадает шесть очков (событие А).

Решение: При подбрасывании двух игральных костей общее число равновозможных элементарных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$.

Событию А благоприятствуют пять пар: (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1), т.е. $m = 5$. Следовательно, искомая вероятность $p(A) = 5 / 36$.

Пример. Таня и Ваня хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?

Решение: 10 человек могут усесться за стол $10!$ разными способами. Таня и Ваня, сидя рядом, могут занять 20 разных позиций. В то же время восьмерка их друзей может сесть за стол $8!$ разными способами, поэтому $m = 20 \cdot 8!$

Следовательно, $P = 20 \cdot 8! / 10! = 2/9$.

Пример. Определить вероятность того, что при бросании двух монет хотя бы один раз выпадет орел.

Решение: А – выпадение орла на 1 монете, В – на 2 монете. События А и В не составляют полную группу событий (ооорр ор ро). Значит, эти события совместимы: $p(A + B) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4$.

Пример. Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна $p(A) = 0,6$, а вторым $p(B) = 0,4$. Какова вероятность того, что экзамен сдаст хотя бы один студент?

Решение: События А и В не составляют полную группу событий. Значит, эти события совместимы: $p(A + B) = 0,6 + 0,4 - 0,6 \cdot 0,4 = 0,76$.

Пример. Определить вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение: А - выпадение 6 очков при бросании первой игральной кости и В - то же, но для второй игральной кости. События А и В не составляют полную группу событий, т.е. А и В совместны,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36.$$

Пример. Для участия в соревнованиях выделили 9 спортсменов, среди которых 3 - мастера спорта, 3 - перводазрядники и 3 - второразрядники. Вызывается один спортсмен. Найти вероятность того, что он перворазрядник, если он не был мастером спорта.

Решение: Здесь имеет место условная вероятность, она равна: $p(A / B) = 3/6 = 1/2$.

Пример. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что:

а) вынуты два валета: А — «первая карта — валет», В — «вторая карта — валет».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты два валета $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A) = 4/32 \cdot 3/31 = 3/248$.

б) вынуты две карты пиковой масти: С — «первая карта пик», D — «вторая карта пик».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты две карты пиковой масти:

$$p(C \cdot D) = p(C) \cdot p(D/C) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124}.$$

в) вынуты валет и дама: А — «первая карта — валет», Е — «вторая — дама».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты валет и дама: $p(A \cdot E) = p(A) \cdot p(E/A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{62}.$

Пример. 5 винтовок, на 3 из которых были оптические прицелы. Вероятность поразить мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; для винтовки без оптического прицела она равна 0,55. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсанту будет предложена наугад взятая винтовка.

Решение: Из условия примера можно записать:

$p(B_1) = 0,9$ - вероятность поражения мишени из винтовки с оптическим прицелом;

$p(A/B_1) = \frac{3}{5} = 0,6$ - вероятность, что выбрана винтовка с оптическим прицелом;

$p(B_2) = 0,55$ - вероятность поражения мишени из обычной винтовки;

$p(A/B_2) = \frac{2}{5} = 0,4$ - вероятность выбора обычной винтовки.

Тогда искомая вероятность будет равна: $p(A) = 0,9 \cdot 0,6 + 0,55 \cdot 0,4 = 0,76.$

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Процессы информатизации и математизации современных гуманитарных наук.
2. Развитие клиометрики и квантитативной истории в зарубежной и отечественной исторической науке.
3. Основные направления развития современной количественной истории.
4. Основные характеристики массовых источников.
5. Альтернатива количественного анализа.
6. Основные характеристики качественного анализа.
7. Формы математизации научного знания.
8. Этапы клиометрического исследования.
9. Правильная постановка исследовательской задачи и ее роль в разработке изучаемой темы.
10. Описательная статистика: основные понятия и характеристика.
11. Характеристики среднего значения признака.
12. Показатели меры вариации признака.
13. Понятие генеральной совокупности.
14. Выборочный метод.
15. Понятие репрезентативности выборки.
16. Виды выборочного изучения.
17. Кластерный анализ как средство типологического анализа.
18. Методика кластерного анализа.
19. Корреляционный анализ в археологии и исторической науке. Линейная корреляция.
20. Проверка значимости коэффициента корреляции.
21. Линейная регрессия (парная и множественная).
22. Понятие коэффициента детерминации.
23. Классификация методов факторного анализа.
24. Метод определения сравнительной достоверности источников.
25. Методы формирования системы репрезентативных данных источника.
26. Понятие репрезентативности «естественных выборок».
27. Суть метода «критерия знаков».

28. Математические методы в исторической науке в XIX веке.
29. Школа «Анналов», «тотальная» и количественная история.
30. Понятие и возможности информационных технологий в построении исторических реконструкций.
31. Проблемы исторического моделирования.
32. История использования математических методов в археологии.
33. Статистические методы обработки археологических данных.
34. Разработка классификации и типологии археологических объектов с помощью средств математической статистики и теории информации.
35. Математическое моделирование в исторической науке и в археологии.
36. Клиодинамика в реконструкции прошлого и прогнозах будущего.
37. Моделирование средствами фрактальной геометрии.

1.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Основными формами текущего контроля являются выполнение самостоятельных работ, контрольная работа, тест, посещаемость, экзамен в 6 семестре.

В промежуточную аттестацию включаются как теоретические вопросы, так и практические задания. Студенты, не сдавшие промежуточную аттестацию, не допускаются к сдаче зачета.

Соотношение вида работ и количества баллов в рамках процедуры оценивания

Вид работы	количество баллов
Посещаемость	до 10 баллов
Тест	до 15 баллов
Самостоятельная работа	до 15 баллов
Контрольная работа	до 30 баллов
Экзамен	до 30 баллов

1.4.1. Шкала оценки посещаемости:

посещаемость, %	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
в баллах	10	10	9	8	7	4	3	2	0	0	0

1.4.1. Выполнение *теста* оценивается по шкале от 0 до 15 баллов. Освоение компетенций зависит от результата выполнения *теста*: 13-15 баллов (80-100% правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на высоком уровне (оценка отлично); 10-12 баллов (70-75 % правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на базовом уровне (оценка хорошо); 7-9 баллов (50-65 % правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на удовлетворительном уровне (оценка удовлетворительно); 0-3

баллов (менее 50 % правильных ответов) - компетенции считаются не освоенными (оценка неудовлетворительно).

1.4.2 *Самостоятельная работа* оценивается от 0 до 16 баллов. Освоение компетенций зависит от результата написания *самостоятельной работы*: 13-15 баллов (80-100% правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на высоком уровне (оценка отлично); 10-12 баллов (70-75 % правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на базовом уровне (оценка хорошо); 7-9 баллов (50-65 % правильных ответов) - компетенции считаются освоенными на удовлетворительном уровне (оценка удовлетворительно); 0-3 баллов (менее 50 % правильных ответов) - компетенции считаются не освоенными (оценка неудовлетворительно).

Критерии оценивания	Интервал оценивания
1. Самостоятельно и аргументировано делать анализ, обобщать, выводы	0-3
2. Самостоятельно, уверенно и безошибочно применяет полученные знания в решении проблем на творческом уровне	0-3
3. Умеет составить полный и правильный ответ на основе изученного материала; выделять главные положения, самостоятельно подтверждать ответ конкретными примерами, фактами	0-4
4. Понимание сущности рассматриваемых понятий, явлений и закономерностей, теорий, взаимосвязей	0-5

1.4.3. *Контрольная работа* оценивается по шкале от 0 до 30 баллов. Освоение компетенций зависит от результата *контрольной работы*: 25-30 баллов - компетенции считаются освоенными на продвинутом уровне (оценка отлично); 13-19 баллов - компетенции считаются освоенными на базовом уровне (оценка хорошо); 6-12 баллов - компетенции считаются освоенными на удовлетворительном уровне (оценка удовлетворительно); 0-5 баллов - компетенции считаются не освоенными (оценка неудовлетворительно).

1.4.4 Шкала оценивания экзамена

Критерии оценивания	Интервал оценивания
студент быстро и самостоятельно готовится к ответу; при ответе полностью раскрывает сущность поставленного вопроса; способен проиллюстрировать свой ответ конкретными примерами; демонстрирует понимание проблемы и высокий уровень ориентировки в ней; формулирует свой ответ самостоятельно, используя лист с письменным вариантом ответа лишь как опору, структурирующую ход рассуждения	21-30
студент самостоятельно готовится к ответу; при ответе раскрывает основную сущность поставленного вопроса; демонстрирует	13-20

понимание проблемы и достаточный уровень ориентировки в ней, при этом затрудняется в приведении конкретных примеров.	
студент готовится к ответу, прибегая к некоторой помощи; при ответе не в полном объеме раскрывает сущность поставленного вопроса, однако, при этом, демонстрирует понимание проблемы.	6-12
студент испытывает выраженные затруднения при подготовке к ответу, пытается воспользоваться недопустимыми видами помощи; при ответе не раскрывает сущность поставленного вопроса; не ориентируется в рассматриваемой проблеме; оказываемая стимулирующая помощь и задаваемые уточняющие вопросы не способствуют более продуктивному ответу студента.	0-5

Неудовлетворительной сдачей *экзамена* считается экзаменационная составляющая менее или равная 10 баллам (при максимальном количестве баллов, отведенных на *экзамен* 30). При неудовлетворительной сдаче *экзамена* (менее или равно 10 баллам) или неявке по неуважительной причине на *экзамен* экзаменационная составляющая приравнивается к нулю (0). В этом случае студент в установленном в Университете порядке обязан пересдать *экзамен*.

2.4. При пересдаче *экзамена* используется следующее правило для формирования рейтинговой оценки:

- 1-я пересдача – фактическая рейтинговая оценка, полученная студентом за ответ, минус 10 баллов;

- 2-я пересдача – фактическая рейтинговая оценка, полученная студентом за ответ, минус 20 баллов.

Уровень сформированности компетенций оценивается в соответствии с Таблицей 1.

Таблица 1

№ п/п	ФИО	Сумма баллов, набранных в семестре					ИТОГО 100 баллов
		Посещаемость до 10 баллов	Тест до 15 баллов	Самостоятельная работа до 15 баллов	Контрольная работа до 30 баллов	Экзамен до 30 баллов	
1	2	3	4	5	6	7	9
1.							