

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Наумова Наталия Александровна
Должность: Ректор
Дата подписания: 16.09.2026 10:17:34
Уникальный программный ключ:
6b5279da4e034bffa79172803da5b7b559f69e2

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Экономический факультет
Кафедра экономики и предпринимательства

УТВЕРЖДЕН
На заседании кафедры
Протокол от «13» июня 2023 г. №11
И.о. зав. кафедрой


/Лавров М.Н./

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**
по дисциплине (модулю)

Математические методы в исторических исследованиях

Направление подготовки
46.03.01 История

Профиль:
Исторические науки

Мытищи
2023

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
ОПК-1. Способен осуществлять отбор, критический анализ и интерпретацию исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач в сфере своей профессиональной деятельности.	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа
ОПК-5. Способен применять современные информационно-коммуникационные технологии для решения исследовательских и практических задач профессиональной деятельности.	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
ОПК-1	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: основные методы поиска и анализа исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач, поставленных в ходе исторического исследования. Уметь: работать в прикладных программах, позволяющих проводить анализ количественных характеристик исторических явлений, создавать модели исторических явлений.	Доклад Практическое задание Контрольная работа	Шкала оценивания доклада Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания контрольной работы
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: основные методы поиска и анализа исторических источников, исторических фактов, исторической информации при решении задач, поставленных в ходе исторического исследования. Уметь: работать в прикладных программах, позволяющих проводить анализ ко-	Доклад Практическое задание Контрольная работа Практическая подготовка	Шкала оценивания доклада Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания контрольной работы

			личественных характеристик исторических явлений, создавать модели исторических явлений. Владеть: методами историко-статистического анализа, методами математического моделирования исторических явлений и их качественной интерпретации.		Шкала оценивания практической подготовки
ОПК-5	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: основные методы и приёмы применения ИКТ и программных средств для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка. Уметь: работать в прикладных программах и сетевых ресурсах для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка.	Доклад Практическое задание Контрольная работа	Шкала оценивания доклада Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания контрольной работы
	Продвину- тый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: основные методы и приёмы применения ИКТ и программных средств для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка. Уметь: работать в прикладных программах и сетевых ресурсах для решения исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности историка. Владеть: методами анализа исторической информации, моделирования историче-	Доклад Практическое задание Контрольная работа Практическая подготовка	Шкала оценивания доклада Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания контрольной работы Шкала оценивания практической подготовки

			ских явлений, интерполяции и экстраполяции результатов исторического исследования с помощью ИКТ и прикладных программ.		
--	--	--	--	--	--

Шкала оценивания доклада

Критерии оценивания	Интервал оценивания
1. Степень раскрытия темы	0-4
2. Личный вклад автора	0-4
3. Структурированность материала	0-3
4. Объем и качество используемых источников	0-2
5. Грамотность речи	0-3
6. Наличие презентации	0-4
Итого	20

Шкала оценивания практического задания

Критерии оценивания	Интервал оценивания
Правильно и рационально решены практические задачи; даны исчерпывающие и обоснованные ответы; при ответах выделялось главное; ответы и выводы были четкими и краткими, мысли излагались в логической последовательности; показано умение самостоятельно анализировать факты, события, явления, процессы в их взаимосвязи и диалектическом развитии.	17-20
Правильно, но не всегда рационально решены практические задачи; даны исчерпывающие и обоснованные ответы; при ответах не всегда выделялось главное; ответы в основном были краткими, но не всегда четкими; мысли не всегда излагались в логической последовательности.	12-16
Даны в основном правильные ответы на все поставленные вопросы, но без должной глубины и обоснования, при решении практических задач студент использовал прежний опыт и не применял новые методы выполнения расчётов, однако, на уточняющие вопросы даны правильные ответы; при ответах не выделялось главное; ответы были нечеткими и без должной логической последовательности.	7-11
Затрудняется при выполнении практических задач, работа проводится с опорой на преподавателя или других студентов.	0-6

Шкала оценивания контрольной работы

Критерии оценивания	Интервал оценивания
---------------------	---------------------

Правильно и рационально решены расчетные задания; даны исчерпывающие и обоснованные выводы; при ответах выделялось главное; ответы и выводы были четкими и краткими.	17-20
Правильно, но не всегда рационально решены расчетные задания; даны исчерпывающие и обоснованные выводы; при ответах не всегда выделялось главное; ответы в основном были краткими, но не всегда четкими и логичными.	12-16
При решении практических задач студент использовал прежний опыт и не применял новые методы выполнения расчётов; даны в основном правильные ответы и выводы, но без должной глубины и обоснования; в выводах не выделялось главное, они не всегда были четкими и логичными.	7-11
Затрудняется при выполнении практических задач, работа проводится с опорой на преподавателя или других студентов.	0-6

Шкала оценивания практической подготовки

Критерии оценивания	Интервал оценивания
Правильно и рационально решены практические задачи; даны исчерпывающие и обоснованные ответы; при ответах выделялось главное; ответы и выводы были четкими и краткими, мысли излагались в логической последовательности; показано умение самостоятельно анализировать факты, события, явления, процессы в их взаимосвязи и диалектическом развитии.	10
Правильно, но не всегда рационально решены практические задачи; даны исчерпывающие и обоснованные ответы; при ответах не всегда выделялось главное; ответы в основном были краткими, но не всегда четкими; мысли не всегда излагались в логической последовательности.	7
Даны в основном правильные ответы на все поставленные вопросы, но без должной глубины и обоснования, при решении практических задач студент использовал прежний опыт и не применял новые методы выполнения расчётов, однако, на уточняющие вопросы даны правильные ответы; при ответах не выделялось главное; ответы были нечеткими и без должной логической последовательности.	5
Затрудняется при выполнении практических задач, работа проводится с опорой на преподавателя или других студентов.	3

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Темы докладов

1. Роль и место математических методов в историческом познании.
2. Макро- и микроистория: проблемы периодизации и исторического моделирования.
3. Математические методы в источниковедении.
4. Математические методы в источниковедении.
5. Историческая демография и её математические модели.
6. Математическое моделирование и прогнозирование исторических процессов.

Практические задания

Тема «Основы теории вероятностей»

1. В коробке содержится 6 одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
2. В ящике содержится 12 деталей завода №1, 20 деталей завода №2, 18 деталей завода №3. Вероятность того, что деталь завода №1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов №2 и №3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.
3. Бросают три игральных кубика. Составить закон распределения числа выпавших «шестерок» на трех кубиках. Построить многоугольник распределения.
4. Дано распределение дискретной случайной величины:

x_i	4	6	8	12
p_i	0,3	0,1	0,3	0,3

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

5. Масса вагона — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0,9$ т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т, но не менее 60 т.

Тема «Статистические показатели и анализ частотных распределений»

1. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) сгруппируйте их по:

- а) числу рабочих;
- б) мощности двигателей;
- в) объему производства.

В какую группу попадает наибольшая доля предприятий?

Постройте гистограммы и кумуляты. Объясните значения кумулятивных частот.

2. Найдите среднюю численность рабочих на предприятиях, стандартное отклонение и коэффициент вариации. Сделайте выводы.
3. Выберите из базы предприятия, численность рабочих на которых колеблется в интервале [100; 1000]. Сгруппируйте предприятия по числу рабочих, используя начальный интервальный шаг 15 и константу геометрической прогрессии 2. (Последний интервал сделайте открытым). По получившемуся ряду найдите среднюю численность рабочих, медиану, стандартное отклонение и коэффициент вариации. Сделайте выводы.
4. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906», ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) исследуйте возрастной состав депутатов. Для этого:

- сформируйте пять равноинтервальных возрастных групп;
- используя правило «трех сигм», проверьте получившийся вариационный ряд на соответствие нормальному закону распределения.
- найдите теоретические частоты;
- нарисуйте график эмпирического и теоретического распределения, сделайте выводы;
- подтвердите полученные результаты с помощью критерия согласия Пирсона.
- постройте диаграммы по национальному, образовательному, сословному, фракционному составам Думы. Попытайтесь проследить некоторые зависимости, сделайте выводы.

Тема «Выборочный метод»

1. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL:

<http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>):

- сформируйте механическую 10%-ую выборку предприятий по числу рабочих;
 - определите доверительный интервал средней численности рабочих на предприятии, гарантируя результат с вероятностью 0,95;
 - определите, какое количество предприятий надо проанализировать, чтобы с вероятностью 0,997 предельная ошибка численности рабочих не превышала 10 человек.
2. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906» ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), рассчитать величину доверительного интервала для среднего возраста депутатов I Государственной думы, исходя из предположения, что мы имеем сведения только для:
- 200 человек;
 - 300 человек.
3. Из генеральной совокупности 1000 тыс. крестьянских хозяйств отобраны 100 хозяйств. Оказалось, что 10 хозяйств используют наемный труд. С вероятностью 0,95 определить долю таких хозяйств в генеральной совокупности.

Темы «Анализ взаимосвязей в исторических явлениях и процессах» и «Регрессионные модели в историческом исследовании»

1. Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>):
- постройте две диаграммы рассеяния для переменных: 1) «произведено» и «рабочие», 2) «произведено» и «двигатели» по одной из отраслей промышленности;
 - сравните полученные диаграммы, сделайте вывод о тесноте и направленности связи.
2. Используя данные (см. пункт 1):
- найдите линейные коэффициенты корреляции и коэффициенты детерминации для зависимости объема производства от числа рабочих и суммарной мощности двигателей по одной из отраслей;
 - проверьте значимость коэффициентов;
 - постройте доверительные интервалы коэффициента вариации для всей отрасли, сделайте выводы.
3. Используя данные (см. пункт 1):
- постройте множественную регрессионную модель зависимости объема производства от числа рабочих и суммарной мощности двигателей по одной из отраслей;
 - проверьте значимость каждого коэффициента регрессии;
 - проверьте факторы на мультиколлинеарность;
 - если факторы неколлинеарны, вычислите множественный коэффициент корреляции, в обратном случае — скорректируйте регрессионную модель;
 - проверьте значимость множественного коэффициента корреляции;
 - проверьте адекватность всей модели регрессии, интерпретируйте результаты.
4. По данным таблицы «Участники революционного движения в России во второй половине XIX в.» вычислите ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла.

Категория	% участников
Возраст	
До 20 лет	37,00
21-25	45,20
26-30	12,50
31-35	2,80
36-40	1,40
41-45	1,00
46-50	0,07

Более 50 Сословие	0,03
Дворяне	30,00
Духовенство	22,00
Почетные граждане	9,00
Купцы	6,00
Военные (недворяне)	5,00
Мещане	14,00
Крестьяне	5,00

5. Используя в качестве исходного материала БД «Дума-1906» ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), постройте таблицы сопряженности для:

- уровня образования и партийной принадлежности;
- профиля образования и партийной принадлежности;
- профиля образования и сословного происхождения.

Объясните, насколько значимо в каждом случае отклонение реальных частот парной встречаемости от ожидаемых.

6. Используя данных (см. пункт 5), построить график распределения частот парной встречаемости для переменных:

- уровень образования и партийная принадлежность;
- профиль образования и партийная принадлежность;

Тема «Кластерный анализ»

1. Классифицировать на два и три класса с помощью метода k -средних данные о результатах голосования за основные политические партии на выборах 1917 г. в Учредительное собрание по избирательным округам (файл Uchred.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Сравнить полученные результаты.

2. Классифицировать эти же данные, пользуясь агломеративно-иерархическим методом. Какой из методов дает лучшие результаты.

3. Используя файл Tambov.sta (URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>), классифицировать уезды Тамбовской губернии:

а) по данным социально-экономического характера;

б) по данным о числе голосов, поданных за различные политические партии на выборах в Учредительное собрание.

Выяснить степень сходства полученных результатов по дендрограммам.

4. Постройте классификацию стран мира по данным демографической статистики (файл Demo_wor.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Предварительно стандартизируйте исходные данные.

5. Постройте классификацию республик СССР по данным о среднем числе членов семьи (файл Family.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>).

Тема «Факторный анализ»

1. Используя данные статистического сборника [С.И. Гулишамбаров «Сравнительная статистика России в Мировом Хозяйстве и в ряду Великих Держав в первое десятилетие царствования императора Николая II 1894-1904 гг.»](#) статья «Живой инвентарь, паровые двигатели, пути и средства сообщения» (URL: http://istmat.info/files/uploads/22542/sravnit_har-ka_ii.pdf):

- составьте сводную таблицу основных инфраструктурных единиц на 1904 год;
- проведите факторный анализ, выявите факторные нагрузки и проанализируйте факторные веса;
- постройте графики распределения объектов в пространствах выявленных факторов; сделать выводы.

2. Проведите факторный анализ, используя данные таблицы «Характеристика 20 стран на 2012 год» (URL: <http://www.ereport.ru/stat.php?count=G20>). Охарактеризуйте полученные факторы и опишите их влияние на объекты. Постройте графики распределения объектов в пространстве выявленных факторов. Сделать выводы.

Страны	Населе- ние, млн. человек	Размер реаль- ного ВВП, млрд. долла- ров США	Размер ВВП на душу насе- ления, тыс. долров США	Ин- фля- ция, %	Уровень безрабо- тицы, %	Торговый ба- ланс, млрд. долларов США
Австралия	22.0	1542.0	70.1	2.1	5.2	24.2
Аргентина	42.2	474.8	11.3	25.0	7.2	18.1
Бразилия	205.7	2425.0	11.8	5.5	6.2	3.2
Великобрита- ния	63.0	2434.0	38.6	2.8	7.8	-165.0
Германия	81.3	3367.0	41.4	2.0	6.5	216.0
Индия	1205.1	1947.0	1.6	9.2	9.9	-191.2
Индонезия	248.2	894.9	3.6	4.5	6.1	9.7
Италия	61.3	1980.0	32.3	3.0	10.9	13.6
Канада	34.3	1770.0	51.6	1.8	7.3	0.8
Китай	1343.2	8250.0	6.1	2.6	6.4	233.0
Мексика	115.0	1163.0	10.1	3.6	5.0	-8.5
Россия	143.0	1954.0	13.7	5.1	5.7	195.3
Саудовская Аравия	26.5	657.0	24.8	4.6	10.7	244.7
США	313.8	15650.0	49.9	2.0	8.2	-745.0
Турция	79.7	783.1	9.8	9.1	9.0	-71.4
Франция	65.6	2580.0	39.3	1.3	10.3	-91.4
ЮАР	48.8	390.9	8.0	5.2	22.7	-5.6
Южная Корея	48.9	1151.0	23.5	2.2	3.2	38.4
Япония	127.4	5984.0	47.0	0.1	4.4	-64.0

Тема «Анализ рядов динамики»

1. Используйте данные представленные в таблицах «Валовая добыча угля в Западной Сибири (URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) и «Динамика курса рубля в 1993 году»

1993	Официальный курс рубля (на конец периода), руб. за 1 доллар США
Январь	572
Февраль	593
Март	684
Апрель	823
Май	994
Июнь	1060
Июль	990
Август	993
Сентябрь	1169
Октябрь	1186
Ноябрь	1231
Декабрь	1247

- охарактеризуйте скорость и интенсивность изменений в рядах динамики;
 - найдите средние показатели рядов;
 - определите наличие тенденции развития (среднего уровня / дисперсии / автокорреляции);
 - докажите (в случае наличия) статистическую значимость тренда;
 - охарактеризуйте трендовую составляющую рядов с помощью средних показателей, методом 3-хчленной скользящей средней, методом аналитического выравнивания; проверьте и докажите адекватность выбранной модели;
 - сделайте выводы.
3. Выявите закономерную составляющую в поведении урожайности зерновых культур в СССР (файл Harvest2.sta URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>). Проведите анализ остатков. Интерпретируйте полученные результаты.

Тема «Анализ структуры исторических явлений»

1. Используя данные представленные в таблице «Племенной состав иммигрировавших в США уроженцев России за период 1901—1911 (URL: http://www.hist.msu.ru/Dynamics/01_dem.htm), проанализируйте национальную структуру эмигрантов из России и структурные сдвиги, произошедшие за период 1901—1911 гг.

Племенной состав иммигрировавших в США уроженцев России за период 1901-1911									
Года	Русские	Поляки	Литовцы	Немцы	Шведы, датч., норв.	Финны	Евреи	Прочие	Итого
1901	667	21 475	8 805	5 643	1 025	9 966	37 660	16	85 257
1902	1 536	33 859	9 975	8 542	1 727	13 854	37 846	8	107 347
1903	3 589	39 548	14 420	10 485	1 571	18 776	47 689	15	136 093
1904	4 080	32 577	12 707	7 128	871	10 077	77 544	15 7	145 141
1905	3 456	47 224	17 649	6 722	690	16 671	92 388	97	184 897
1906	5 541	46 204	13 697	10 279	937	13 461	125 234	31 2	215 665
1907	16 235	73 122	24 811	13 480	1 416	14 311	114 932	63 6	258 943
1908	16 361	37 947	13 270	10 009	527	6 303	71 978	31 6	156 711
1909	9 169	37 770	14 595	7 781	591	11 202	39 150	20 2	120 460
1910	14 870	63 635	21 676	10 016	1 398	14 999	59 824	37 4	186 792
1911	17 777	40 193	16 210	8 779	730	8 942	65 472	61 8	158 721
Русские - включая русских из Австрии (ruthenians, russniaks), которых американцы по австрийскому обычаю отделяют от русских России									
Литовцы - вероятно, включая латышей									

Определите:

- удельный вес каждой национальности по годам;
- средний удельный вес национальностей за весь период;
- «абсолютный» прирост удельного веса каждой национальности;
- средний «абсолютный» прирост удельного веса каждой национальности;
- темп роста удельного веса каждой национальности по годам;
- средний темп роста удельного веса каждой национальности за весь период;
- квадратические коэффициенты «абсолютных» и относительных структурных сдвигов.

Сделайте выводы о подвижности / стабильности национального состава эмигрантов в рассматриваемый период.

- Используя в качестве исходного материала данные базы предприятий Закавказских губерний (начало XX века), ([Электронный ресурс] — URL: <http://www.hist.msu.ru/Labs/HisLab/Stud/files.htm>) определите степень концентрации рабочих ресурсов по предприятиям, нарисуйте кривую концентрации, сделайте выводы.
- Используя в качестве исходного материала данные базы «Динамика российской промышленности за 1887—1913 гг.» ([Электронный ресурс — URL: www.hist.msu.ru/Labs/Eco-hist/DBASES/INDUSTRY/index.htm]) определите степень централизации стоимости валовой продукции, выпускаемой различными отраслями хозяйства в 1887 и 1913 году, сравните показатели, сделайте выводы.

Материалы для контрольных работ

Тема: Матрицы и определители

Цель - научиться вычислять определители произвольного порядка, научиться работать с матрицами (умножать на число, складывать, умножать матрицу на матрицу), освоить свойства матриц и определителей и свободно применять их при решении задач и примеров.

Пусть даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

матрицы складываются поэлементно, поэтому суммой матриц A и B будет матрица $C=A+B$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 5 & 10 & 8 \\ 9 & -6 & 12 \end{pmatrix};$$

чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число, в результате умножение элементов матрицы A на число 4 получится матрица D

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 20 \\ 8 & 12 & 16 \\ 32 & -4 & 16 \end{pmatrix};$$

чтобы умножить матрицу A на B , надо каждую строку матрицы A умножить соответственно на элементы столбцов и результаты перемножить, в итоге получится матрица $C = (c_{ij})$:

$$c_{11} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 0;$$

аналогично получают остальные элементы матрицы C .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -29 & 45 \\ 3 & 7 & 52 \\ -15 & -3 & 86 \end{pmatrix};$$

Тема: Обратная матрица и ее вычисление

Цель— научиться вычислять ранг матрицы и находить обратную матрицу, решать экономические задачи приводящие к рассмотрению матричных уравнений.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу, обратную данной. Сделать проверку.

$|A| = 2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A .

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = 1, \quad A_{22} = 1.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{|A|} A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

2. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$a_{12}^{-1} = \frac{1}{4} A_{21} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда

$$a_{31}^{-1} = \frac{1}{4} A_{13} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -6, \quad A_{13} = 3, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1, \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = -4.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} (A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Тема: Системы n линейных уравнений с n неизвестными

Цель занятия – научиться решать системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1,$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0.$$

Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что, например, минор второго порядка в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0;$$

содержащие его миноры третьего порядка равны нулю:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M''_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен 2, т.е. $r(A) = 2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы $\bar{A}$ рассмотрим окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

значит, ранг расширенной матрицы $r(\bar{A}) = 3$. Поскольку $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

Тема: Линейные пространства.

Цель— научиться строить точки и линии в координатной системе координат на плоскости, уметь находить расстояние между двумя точками. Знать действия над векторами.

Умножение вектора на число.

$\frac{1}{2}\bar{a}$ — есть вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\bar{a}$, и имеющий длину, вдвое меньшую, чем вектор $\bar{a}$.

Сложение, разность векторов

1. Заданы точки $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; -1)$. Найти вектор $\overline{BA}$.

$$\overline{BA} = (1, -2, 3) - (2, 0, -1) = (-1, -2, 4).$$

2. Даны $A(-2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(0; 1; 1)$. Найти $\bar{a} = 2\overline{AB} + \overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (1; -1; -1), \quad \overline{AC} = (2; -2; 0).$$

$$\bar{a} = 2\overline{AB} + \overline{AC} = (2, -2, -2) + (2, -2, 0) = (4, -4, -2).$$

3. Известно, что $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB}$. Найти координаты точки D , если

$$D(x, y, z). \quad \overline{CA} = (6; 1; -5), \quad \overline{CB} = (-1; 9; 3), \quad \overline{CD} = (x+3, y+5, z-4)$$

Пусть $A(3; -4; -1)$, $B(-4; 4; 1)$, $C(-3; -5; 4)$ тогда

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB} = (5; 10; -8)$$

Следовательно, должно выполняться равенство $(x+3; y+5; z-4) = (5; 10; -8)$.

Отсюда $x=2$, $y=5$, $z=-4$, т.е. точка D имеет координаты $D(2; 5; -4)$.

$$|\bar{a}| = 4, \quad |\bar{b}| = 3, \quad (\bar{a}, \bar{b}) = 60^\circ.$$

Скалярное произведение векторов

Дан вектор $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$.

Известно, что

$$\bar{c}^2 = |\bar{c}|^2 = \sqrt{\bar{c}^2}$$

Найти $|\bar{c}|$.

Найдем:

$$\bar{c}^2 = (2\bar{a} + 3\bar{b})^2 = 4\bar{a}^2 + 12\bar{a}\bar{b} + 9\bar{b}^2 = 4|\bar{a}|^2 + 12|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b}) + 9|\bar{b}|^2 = 64 + 72 + 81 = 217$$

Следовательно, $|\vec{c}| = \sqrt{217}$

Условие ортогональности

1.

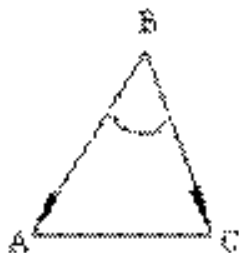
$$\vec{a} = \overline{AB}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$$

Пусть $A(-1; 1; 0), B(3; 1; -2)$,

Найти:

$$\vec{a} \cdot \vec{b};$$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos \varphi.$$



$$\vec{a} = (4; 0; -2), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 8 + 6 = 14.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{13}.$$

$$\cos \varphi = \frac{14}{\sqrt{20} \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

2. Найти $\angle B$ в $\triangle ABC$, если известны координаты его вершин $A(1; 5; 6)$, $B(5; 3; 10)$, $C(2; 1; 14)$.

$$\angle B = (\overline{BA}, \overline{BC})$$

$$\overline{BA} = (-4; 2; -4), \quad \overline{BC} = (-3; -2; 4), \quad |\overline{BA}| = 6, \quad |\overline{BC}| = 29$$

$$|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| = 12 - 4 - 16 = -8.$$

$$\cos \varphi = \frac{-8}{6 \sqrt{29}} = -\frac{4}{3 \sqrt{29}}, \quad \varphi = \arccos \left(-\frac{4}{3 \sqrt{29}} \right) = 104^\circ.$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}, \quad \vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

При каком значении m векторы перпендикулярны?

Условие ортогональности двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2m - 15 - m = m - 15 = 0.$$

Следовательно, $m = 15$.

Тема: Прямые линии на плоскости.

Цель - научиться решать задачи, где рассматриваются различные виды уравнений прямой. Уметь выполнять действия с векторами. Уметь применять формулы скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$.

Используя выведенное уравнение, получим $2(x-1) + 0(y+2) + 4(z-3) = 0$ или $x + 2z - 7 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 0)$, $C(3; 0; 1)$.

Чтобы составить требуемое уравнение, нужно найти вектор перпендикулярный плоскости. Заметим, что таким вектором будет вектор

$$\vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

Найдем этот вектор.

$$\overline{AB} = (-2; -2; -3), \quad \overline{AC} = (2; -2; -2).$$

Тогда

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 10\vec{j} + 8\vec{k}$$

Взяв в качестве точки, через которую проходит плоскость точку А, получим уравнение $-2(x-1)-10(y-2)+8(z-3)=0$ или $x+5y-4z+1=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ параллельно плоскости yOz (перпендикулярно оси Ox).

Так как $yOz \parallel \alpha$, то уравнение плоскости будет $Ax+D=0$. С другой стороны $M \in \alpha$, поэтому $2A+D=0$, $D=-2A$. Поэтому плоскость имеет уравнение $x-2=0$.

4. Определить угол между плоскостями $x+2y-3z+4=0$ и $2x+3y+z+8=0$.

$$\cos \varphi = \frac{2+6-3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{14} \Rightarrow \varphi \approx 69^\circ.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 1; 4)$ параллельно плоскости $3x+2y-7z+8=0$.

Уравнение плоскости будем искать в виде $Ax+By+Cz+D=0$.

Из условия параллельности плоскостей следует, что:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-7}.$$

Поэтому можно положить $A=3$, $B=2$, $C=-7$.

Поэтому уравнение плоскости принимает вид $3x+2y-7z+D=0$.

Кроме того, так как $M \in \alpha$, то $-6+2-28+D=0$, $D=32$.

Итак, искомое уравнение $3x+2y-7z+32=0$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+z=0$.

Так как $M_1 \in \alpha$, то используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, будем иметь $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$.

Далее, так как $M_2 \in \alpha$, то подставив координаты точки в выписанное уравнение, получим равенство $-A-2C=0$ или $A+2C=0$.

Учтем, что заданная плоскость перпендикулярна искомой. Поэтому $A+B+C=0$.

Выразим коэффициенты A и B через C : $A=-2C$, $B=C$ и подставим их в исходное уравнение:

$$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0.$$

Окончательно получаем $-2x+y+z=0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 3; 6)$ перпендикулярно плоскостям $2x+3y-2z-4=0$ и $3x+5y+z=0$.

Так как $M \in \alpha$, то $A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0$.

По условию задачи $\alpha \perp \alpha_1$, $\alpha \perp \alpha_2$, поэтому

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0, \\ 3A+5B+C=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+3B=2C, \\ 3A+5B=-C. \end{cases} \quad \begin{cases} 2A+3B=2C, \\ B=-8C. \end{cases} \quad A=13C.$$

Итак уравнение плоскости принимает вид

$$13(x+2)-8(y-3)+z-6=0 \text{ или } 13x-8y+z+44=0.$$

Записать уравнение прямой в параметрическом виде.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Обозначим

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} = t,$$

отсюда $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 1 - t$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{0}$$

Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_1

$(1; 0; -2)$ параллельно вектору $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

Канонические уравнения: .

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t, \\ z = -2. \end{cases}$$

Найти угол между прямыми и

$$\vec{s}_1 = (1; -4; 1), \quad \vec{s}_2 = (2; -2; 1), \quad \cos \varphi = \frac{2+8+1}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Найти уравнения прямой проходящей через точку $M_1(1; 2; 3)$ параллельно прямой l_1 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 7 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

Поскольку искомая прямая l параллельна l_1 , то в качестве направляющего вектора искомой прямой l можно взять направляющий вектор прямой l_1 .

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k}. \quad l: \frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{17}.$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$$

Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4; 0; 2)$ и перпендикулярной прямым:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}.$$

Направляющий вектор прямой l можно найти как векторное произведение векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}. \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}.$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; -3; 4)$ параллельно прямым

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}.$$

Так как $M_1 \notin \alpha$, то уравнение плоскости будем искать в виде

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-4) = 0.$$

Применяя условие параллельности прямой и плоскости, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A + 2B + 8C = 0, \\ 4A + 2C = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{15}{2}A, \\ C = -2A, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = 2, \\ B = 15, \\ C = -4. \end{cases}$$

Отсюда

$$2x + 15y - 4z + 57 = 0$$

$$\alpha: 2(x-2) + 15(y+3) - 4(z-4) = 0$$

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j}$$

Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0, \\ z = 4. \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y + 4 = 0$.

Направляющий вектор прямой.

Нормальный вектор.

$$\sin \varphi = \frac{10}{10} = 1, \quad \varphi = 90^\circ.$$

$$\vec{n} = (3, 1, 0)$$

плоскости.

3.

Найдите точку, симметричную данной $M(0; -3; -2)$ относительно прямой

$$\frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1}.$$

Составим уравнение плоскости α перпендикулярной l . $M\hat{l} \alpha$, $\vec{n} = \vec{s} = (0, -1, 1)$.

Следовательно, $\alpha: 0(x-0) - (y+3) + (z+2) = 0$ или $-y + z - 1 = 0$.

Найдём точку пересечения прямой l и α :

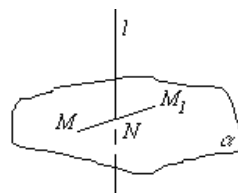
$$\begin{cases} \frac{x-0.5}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z-1.5}{1} = t, \\ -y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0.5, \\ y = -t - 1.5, \\ z = t + 1.5, \\ t + 1.5 + t + 1.5 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0.5, \\ y = -0.5, \\ z = 0.5, \\ t = -1. \end{cases}$$

Итак, $N(0.5; -0.5; 0.5)$. Пусть искомая точка M_1 имеет координаты $M_1(x, y, z)$. Тогда равенство векторов $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM_1}$, т.е. $(0.5; 2.5; 2.5) = (x-0.5; y+0.5; z-0.5)$. Откуда $x=1, y=2, z=3$ или $M_1(1; 2; 3)$.

Тема: Кривые второго порядка. Уравнение прямой

Цель— уметь строить кривые второго порядка на плоскости по их уравнениям. Знать канонические уравнения основных кривых второго порядка. Уметь вычислять эксцентриситет и фокальные радиусы кривых второго порядка. Знать основные формулы уравнений прямой и плоскости в пространстве. Уметь решать задачи на уравнение прямой и плоскости в пространстве.



Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm \frac{3}{4}x$, проходящими через точку $(6; 3/2)$.
Найти расстояние между ее вершинами.

Так как точка $(6; 3/2)$ лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

Кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Решая полученную систему двух уравнений, найдем $a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{2}$, т.е. уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$$

. Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a = 8\sqrt{2}$

Построить кривую $y = -3x^2 + 10x - 3$. Вынося коэффициент при x^2 и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получим

$$y = -3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right] = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \quad \text{или} \quad y - \frac{16}{3} = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2$$

Полагая $x - 5 = x', y - \frac{16}{3} = y'$, получим $y' = -3x'^2$.

Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в точке $O'\left(\frac{5}{3}; \frac{16}{3}\right)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy .

Тема: Пределы

Цель - освоить понятие и определение предела, знать определение и свойства бесконечно малой и бесконечно большой величин. Освоить понятие предела числовой последовательности и функций. Знать свойства пределов, теоремы о пределах. Знать основные теоремы о непрерывных функциях. Уметь раскрывать основные виды неопределенностей.

1. Пусть переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad x_n = 1 + \frac{1}{n}, \dots$$

Докажем, что предел этой числовой последовательности равен 1. Возьмем произвольное положительное число ε . Нам нужно найти такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Действительно, т.к.

$$|x_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n},$$

то для выполнения соотношения $|x_n - a| < \varepsilon$ достаточно, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, взяв

в качестве N любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{\varepsilon}$, получим что

нужно. Так если взять, например, $\varepsilon = \frac{1}{5}$, то, положив $N=6$, для всех $n > 6$ будем иметь

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{6} < \varepsilon.$$

Используя определение предела числовой последовательности, доказать что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - 2n + 1}{2n-1} \right| = \frac{1}{2n-1}.$$

Тогда $\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, если $\frac{1}{2n-1} < \varepsilon$ или $2n-1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$. Поэтому выберем

$$N > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству.

Сделаем несколько замечаний.

I. Неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{2(x-1)(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 6)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x+2} = -2.$$

2. При разложении числителя на множители воспользовались правилом деления многочлена на многочлен «углом». Так как число $x=1$ является корнем многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, то при делении получим

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2+x-9}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x}+3} = 1.$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 5x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

$$ \quad \underline{-5x^2 + 5x} $$

$$ 6x - 6$$

$$ \quad \underline{-6x + 6}$$

$$ 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{8(\sqrt[3]{x} - 2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 64)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x+8)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(x-8)} = \frac{16 \cdot 12}{8} = 24.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = 0$$

4.

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = 3$$

$\frac{\infty}{\infty}$

II. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

1. При вычислении предела числитель и знаменатель данной дроби разделили на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3 + x}{x^5 + 3x^3 - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} \right] = \infty$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x - 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{5}{x}} = \left[\frac{0 - \sqrt{2 - 0}}{1 - 0} \right] = -\sqrt{2}$$

4. При вычислении предела воспользовались равенством $\sqrt{x^2} = -x$, если $x < 0$.

1. Следующие виды неопределенностей с помощью алгебраических преобразований функции, стоящей под знаком предела, сводят к одному из рассмотренных выше слу-

чаев $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

2. III. Неопределенность $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos^2 x = 2$$

3.

4. IV. Неопределенность $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right)} = \frac{-5}{1 + 1} = -2,5. \end{aligned}$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{(1 - x)(1 + x + x^2)} - \frac{1}{1 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 1 - x - x^2}{(1 - x)(1 + x + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^2}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x + 2)}{1 + x + x^2} = -1.$$

2

Тема: Производная функции.

Цель - знать определение производной, и ее геометрический, физический, экономический, знать наизусть таблицу производных основных элементарных функций, уметь вычислять производные сложных функций.

1. $y = x^n$. Если n – целое положительное число, то, используя формулу бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + 1/2 \cdot n(n-1) a^{n-2} \cdot b^2 + 1/(2 \cdot 3) \cdot n(n-1)(n-2) a^{n-3} b^3 + \dots + b^n,$$

можно доказать, что

$$y' = nx^{n-1}$$

Итак, если x получает приращение Δx , то $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$, и, следовательно,

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + 1/2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + \Delta x^n.$$

Заметим, что в каждом из пропущенных слагаемых есть множитель Δx в степени выше 3. Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + \Delta x^{n-1}) = n \cdot x^{n-1}$$

Мы доказали эту формулу для $n \in \mathbb{N}$. Далее увидим, что она справедлива и при любом $n \in \mathbb{R}$.

$y = \sin x$. Вновь воспользуемся определением производной.

Так как, $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$, то

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x+\Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x+\Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Таким образом, $y' = \cos x$

2. Аналогично можно показать, что $(\cos x)' = -\sin x$

3. Рассмотрим функцию $y = \ln x$.

Имеем $f(x+\Delta x) = \ln(x+\Delta x)$.

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln \frac{x+\Delta x}{x} = \ln(1 + \frac{\Delta x}{x}).$$

$$\text{Поэтому } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} = \left| \ln(1^\infty) \right| = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Итак, $y' = \frac{1}{x}$

Используя свойства логарифма можно показать, что $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель занятия - знать определение неопределенного интеграла и его свойства. Научится вычислять неопределенные интегралы методом подстановки

$$\int \frac{dx}{3^x}$$

1. Найти

Решение: Учитывая, что $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и используя $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a = \frac{1}{3}$ получим:

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + c = -\frac{1}{3^x \ln 3} + c$$

$$2. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c, \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x).$$

$$3. \int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin x \cdot d(\sin x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + c, \quad d(\sin x) = \cos x dx.$$

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель занятия – научиться вычислять неопределенные интегралы методом интегрирования по частям

$$1. \int (x^2 + 3)e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 3 \quad du = 2x dx \\ dv = e^x dx \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 + 3)e^x - 2 \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^x dx \quad v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 + 3)e^x - 2xe^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + 3)e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

$$2. \int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Тема: Определенный интеграл

Цель занятия – знать определения и свойства определенного интеграла, знать формулу Ньютона – Лейбница, научиться применять ее при вычислении определенного интеграла.

$$1. \int_0^1 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^x dx \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

$$2. \int_0^4 x \sqrt{2x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2x+1} \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = t dt \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & 4 \\ \hline t & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{t^2-1}{2} \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt - \frac{1}{2} \int_1^3 t dt = \frac{t^4}{10} \Big|_1^3 - \frac{t^2}{6} \Big|_1^3 = \frac{243}{10} - \frac{1}{10} - \frac{27}{6} + \frac{1}{6}.$$

Тема: Теория вероятностей

Пример. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что на них в сумме выпадает шесть очков (событие А).

Решение: При подбрасывании двух игральных костей общее число равновероятных элементарных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$.

Событию А благоприятствуют пять пар: (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1),

т.е. $m = 5$. Следовательно, искомая вероятность $p(A) = 5 / 36$.

Пример. Таня и Ваня хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?

Решение: 10 человек могут усесться за стол $10!$ разными способами. Таня и Ваня, сидя рядом, могут занять 20 разных позиций. В то же время восьмерка их друзей может сесть за стол $8!$ разными способами, поэтому $m = 20 \cdot 8!$

Следовательно, $P = \frac{20 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}$.

Пример. Определить вероятность того, что при бросании двух монет хотя бы один раз выпадет орел.

Решение: А – выпадение орла на 1 монете, В – на 2 монете. События А и В не составляют полную группу событий (ооорр ор ро). Значит, эти события совместимы: $p(A + B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Пример. Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна $p(A) = 0,6$, а вторым $p(B) = 0,4$. Какова вероятность того, что экзамен сдаст хотя бы один студент?

Решение: События А и В не составляют полную группу событий. Значит, эти события совместимы: $p(A + B) = 0,6 + 0,4 - 0,6 \cdot 0,4 = 0,76$.

Пример. Определить вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение: А - выпадение 6 очков при бросании первой игральной кости и В - то же, но для второй игральной кости. События А и В не составляют полную группу событий, т.е. А и В совместны,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример. Для участия в соревнованиях выделили 9 спортсменов, среди которых 3 - мастера спорта, 3 - первозарядники и 3 - второзарядники. Вызывается один спортсмен. Найти вероятность того, что он первозарядник, если он не был мастером спорта.

Решение: Здесь имеет место условная вероятность, она равна: $p(A / B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что:

а) вынуты два валета: А — «первая карта — валет», В — «вторая карта — валет».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты два валета $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

б) вынуты две карты пиковой масти: С — «первая карта пик», D — «вторая карта пик».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты две карты пиковой масти:

$$p(C \cdot D) = p(C) \cdot p(D/C) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124}.$$

в) вынуты валет и дама: А — «первая карта — валет», Е — «вторая — дама».

Решение: Вероятность совместного появления этих событий, т.е. что вынуты валет и дама: $p(A \cdot E) = p(A) \cdot p(E/A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{62}$.

Пример. 5 винтовок, на 3 из которых были оптические прицелы. Вероятность поразить мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; для винтовки без оптического прицела она равна 0,55. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если курсанту будет предложена наугад взятая винтовка.

Решение: Из условия примера можно записать:

$p(B_1) = 0,9$ - вероятность поражения мишени из винтовки с оптическим прицелом;

$p(A/B_1) = \frac{3}{5} = 0,6$ - вероятность, что выбрана винтовка с оптическим прицелом;

$p(B_2) = 0,55$ - вероятность поражения мишени из обычной винтовки;

$p(A/B_2) = \frac{2}{5} = 0,4$ - вероятность выбора обычной винтовки.

Тогда искомая вероятность будет равна: $p(A) = 0,9 \cdot 0,6 + 0,55 \cdot 0,4 = 0,76$.

Задание на практическую подготовку

1. Провести историко-статистическое наблюдение периодических изданий (газет, журналов, статистических сборников и т.п.), по материалам сайта istmat.org. Формализовать исторические источники, используя следующие методы формализации: частотный, ранговый, шкал интервалов и отношений.

2. Определить математико-статистические методы для проведения анализа результатов историко-статистического наблюдения. Дать их описание.
3. Определить систему статистических показателей в рамках проводимого исторического исследования.
4. В рамках построенной модели исследования выбрать необходимые нижеописанные схемы историко-статистического анализа:
 - 1) По вариационному ряду распределения, построенному на основе фактического материала рассчитать показатели центра распределения, показатели степени вариации, проверить распределение на подчинение нормальному закону. Сделать выводы о типичном проявлении признака в исследуемой совокупности, степени однородности и характере распределения.
 - 2) Сформировать 20%-ную выборку из генеральной совокупности в рамках проводимого исторического исследования. Вычислить среднюю ошибку выборки, предельную ошибку выборки, построить доверительный интервал для генеральной средней и генеральной доли, определить оптимальное число единиц выборочной статистической совокупности с заданной предельной ошибкой. Сравнить выборочные и генеральные показатели, сделать выводы.
 - 3) Сформировать 20%-ную выборку из генеральной совокупности в рамках проводимого исторического исследования и провести регистрацию не менее трех признаков у каждой единицы на основе фактического материала. Провести корреляционный анализ, сделать выводы о тесноте и направлении связи. Построить регрессионную модель, описать общую форму модели, сформулировать выводы о скорости изменения факторных и результативных признаков.
 - 4) Провести кластерный анализ в рамках исторического исследования. Описать основные характеристики кластеров.
 - 5) Провести факторный анализ в рамках исторического исследования. Определить основные факторные нагрузки и факторные веса. Сформулировать выводы.
 - 6) Провести комплексный анализ рядов динамики в рамках проводимого исторического исследования. Вычислить абсолютные, относительные и средние показатели динамики в моментных и (или) интервальных рядах с равноотстоящими и неравноотстоящими уровнями. Выявить наличие или отсутствие тренда методом скользящих средних и аналитического выравнивания, доказать статистическую значимость выявленных закономерностей развития.
 - 7) Провести комплексный анализ изменения структуры, определить структурные сдвиги и их влияние на изменение как внутреннего содержания исследуемых объектов, так и установившихся причинно-следственных связей.

Перечень вопросов к экзамену

1. Процессы информатизации и математизации современных гуманитарных наук.
2. Развитие клиометрики и квантитативной истории в зарубежной и отечественной исторической науке.
3. Основные направления развития современной количественной истории.
4. Основные характеристики массовых источников.
5. Альтернатива количественного анализа.
6. Основные характеристики качественного анализа.
7. Формы математизации научного знания.
8. Этапы клиометрического исследования.
9. Правильная постановка исследовательской задачи и ее роль в разработке изучаемой темы.
10. Описательная статистика: основные понятия и характеристика.
11. Характеристики среднего значения признака.
12. Показатели меры вариации признака.

13. Понятие генеральной совокупности.
14. Выборочный метод.
15. Понятие репрезентативности выборки.
16. Виды выборочного изучения.
17. Кластерный анализ как средство типологического анализа.
18. Методика кластерного анализа.
19. Корреляционный анализ в археологии и исторической науке. Линейная корреляция.
20. Проверка значимости коэффициента корреляции.
21. Линейная регрессия (парная и множественная).
22. Понятие коэффициента детерминации.
23. Классификация методов факторного анализа.
24. Метод определения сравнительной достоверности источников.
25. Методы формирования системы репрезентативных данных источника.
26. Понятие репрезентативности «естественных выборок».
27. Суть метода «критерия знаков».
28. Математические методы в исторической науке в XIX веке.
29. Школа «Анналов», «тотальная» и количественная история.
30. Понятие и возможности информационных технологий в построении исторических реконструкций.
31. Проблемы исторического моделирования.
32. История использования математических методов в археологии.
33. Статистические методы обработки археологических данных.
34. Разработка классификации и типологии археологических объектов с помощью средств математической статистики и теории информации.
35. Математическое моделирование в исторической науке и в археологии.
36. Клиодинамика в реконструкции прошлого и прогнозах будущего.
37. Моделирование средствами фрактальной геометрии.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Основными формами текущего контроля являются доклад, практическое задание, контрольная работа, практическая подготовка.

Соотношение вида работ и количества баллов в рамках процедуры оценивания

Вид работы	количество баллов
Доклад	до 20 баллов
Практическое задание	до 20 баллов
Контрольная работа	до 20 баллов
Практическая подготовка	до 10 баллов
Экзамен	до 30 баллов

Шкала оценивания экзамена

Критерии оценивания	Интервал оценивания
студент быстро и самостоятельно готовится к ответу; при ответе полностью раскрывает сущность поставленного вопроса; способен проиллюстрировать свой ответ конкретными примерами; демонстрирует понимание проблемы и высокий уровень ориентировки в ней; формулирует	30

свой ответ самостоятельно, используя лист с письменным вариантом ответа лишь как опору, структурирующую ход рассуждения	
студент самостоятельно готовится к ответу; при ответе раскрывает основную сущность поставленного вопроса; демонстрирует понимание проблемы и достаточный уровень ориентировки в ней, при этом затрудняется в приведении конкретных примеров.	20
студент готовится к ответу, прибегая к некоторой помощи; при ответе не в полном объеме раскрывает сущность поставленного вопроса, однако, при этом, демонстрирует понимание проблемы.	10
студент испытывает выраженные затруднения при подготовке к ответу, пытается воспользоваться недопустимыми видами помощи; при ответе не раскрывает сущность поставленного вопроса; не ориентируется в рассматриваемой проблеме; оказываемая стимулирующая помощь и задаваемые уточняющие вопросы не способствуют более продуктивному ответу студента.	5

Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины

Итоговая оценка по дисциплине выставляется по приведенной ниже шкале. При выставлении итоговой оценки преподавателем учитывается работа обучающегося в течение освоения дисциплины, а также оценка по промежуточной аттестации.

Баллы, полученные студентом по текущему контролю и промежуточной аттестации	Оценка в традиционной системе
81 – 100	отлично
61 - 80	хорошо
41 - 60	удовлетворительно
0 - 40	неудовлетворительно