

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Наумова Наталия Александровна

Должность: Ректор

Дата подписания: 24.10.2024 14:21:41

Уникальный программный ключ:

6b5279da4e034bffa791d9e0330f5991d4f

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)**

Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры высшей алгебры,
математического анализа и геометрии

Протокол от «9» февраля 2023 г., № 6

Зав. кафедрой Кондратьева Г.В. /Кондратьева Г.В./

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по дисциплине (модулю)

Логический анализ числовых систем

Направление подготовки (специальности)

44.04.01 Педагогическое образование

Профиль (программа подготовки, специализация)

Современное математическое образование

Мытищи
2023

Содержание

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.....
2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.....
3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.....
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.....

1.Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы¹

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
СПК-2. Способен к преподаванию учебных курсов, дисциплин (модулей) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа
СПК-4. Способен к разработке учебно-методического обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования.	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания²

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этапы формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
СПК-2	Пороговый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать: , дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования Уметь: преподавать учебные курсы, дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.	Тестовое задание, дискуссия	Шкала оценивания тестового задания Шкала оценивания дискуссии
	Продвинутый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать: , дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования	Тестовое задание, дискуссия, доклад, презентация	Шкала оценивания тестового задания Шкала

¹ Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

² Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

			Уметь: преподавать учебные курсы, дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования. Владеть: навыками преподавания учебных курсов по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.	ия,	оцениван ия дискусси и Шкала оцениван ия доклада Шкала оцениван ия презентац ии
СПК-4	Порогов ый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоя тельная работа	Знать: учебно-методические обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования. Уметь: разрабатывать учебно-методические обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования.	Тестовое задание, дискуссия	Шкала оцениван ия тестового задания Шкала оцениван ия дискусси и
	Продвин утый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоя тельная работа	Знать: учебно-методические обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования. Уметь: разрабатывать учебно-методические обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования. Владеть: навыками разработки учебно-методического обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего	Тестовое задание, дискуссия , доклад, презентац ия	Шкала оцениван ия тестового задания Шкала оцениван ия дискусси и Шкала оцениван ия доклада Шкала оцениван ия презентац ии

			уровня образования.		
--	--	--	---------------------	--	--

Описание шкал оценивания

Шкала оценивания устного опроса.

Если студент излагает материал последовательно и грамотно, делает необходимые обобщения и выводы, то ему выставляется 5 баллов.

Если студент излагает материал неполно, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, при этом студент делает необходимые обобщения и выводы, то ему выставляется 3 балла.

Если студент не раскрывает основного содержания учебного материала, демонстрирует незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допускает ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые им не исправляются после нескольких замечаний преподавателя, то ему выставляется 0 баллов.

Шкала оценивания расчетной работы.

Если студент правильно решил все задания и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 10 баллов.

Если студент правильно решил все задания, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 9-7 баллов (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил 60% - 80% всех заданий, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 6 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 5 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал не все полученные результаты, то ему выставляется 4-1 балл (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 1 балл.

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 0 баллов.

Шкала оценивания конспекта.

Баллы	Критерии
2	Текст работы логически выстроен и математически грамотно изложен, ясен весь ход рассуждения. Имеются ответы на все поставленные вопросы, и они изложены научным языком, с применением терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства необходимых теорем и следствий из них
1	Текст работы логически выстроен, математически грамотно изложен. Имеются ответы не на все поставленные вопросы, они изложены с применением

	терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства не всех необходимых теорем и следствий из них.
0	Текст работы не соответствует теме или отсутствуют адекватность передачи первоисточника и доказательность материала

Шкала оценивания реферата

Оценка	Критерии
8-10 баллов	реферат по теме написан самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
5-7 баллов	реферат удовлетворяет требованиям на оценку в 3 балла, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в реферате может быть недостаточно полно развернута
2-4 балла	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
0-1 балл	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

Шкала оценивания доклада

Оценка	Критерии
5 баллов	доклад по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
4 балла	доклад по теме удовлетворяет требованиям на оценку в 5 баллов, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в докладе может быть недостаточно полно развернута аргументация
3 балл	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
2 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание наиболее важной части учебного материала, допущены

	ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые исправлены после нескольких замечаний преподавателя
1 балл	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные темы для конспектов:

- 1.Аксиоматический метод построения дедуктивных теорий;
- 2.Отношения эквивалентности. Факторизация множества;
3. Отношения порядка;
- 4.Алгебра как алгебраическая система;
- 5.Упорядоченные алгебры;
- 6.Изоморфные алгебры;
- 7.Математические задачи, определившие переход от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел.
- 8.Математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел;
- 9.Математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел;
- 10.Непротиворечивость, полнота и независимость аксиом Пеано;
- 11.Операции сложения и умножения и их свойства;
12. Порядок на множестве натуральных чисел;
13. Свойство дискретности множества натуральных чисел.
- 14.Принцип наименьшего числа;
15. Категоричность теории Пеано;

Примерные задания расчетной работы.

1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in \mathbb{N}$.
2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .
 $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, b = 6$.
3. Докажите методом математической индукции: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.
4. Найдите сумму
 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2018 \cdot 2018! + 2019 \cdot 2019!$

Текущий контроль

СПК-2. Способен к преподаванию учебных курсов, дисциплин (модулей) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

Знать: дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 на пороговом уровне³

Примерные темы для конспектов:

16. Различные формы метода математической индукции;
17. Симметризация множества натуральных чисел;
18. Теорема о строении множества целых чисел;
19. Теорема о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел;
20. Построение кольца Z с помощью теоремы о продолжении изоморфизма;
21. Строение упорядоченного кольца целых чисел;
22. Категоричность теории целых чисел;
23. Строение множества рациональных чисел;
24. Поле классов дробей;
25. Построение поля Q с помощью теоремы о продолжении изоморфизма;
26. Строение упорядоченного поля рациональных чисел;
27. Теорема о категоричности теории рациональных чисел;

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4 на продвинутом уровне

Примерные задания расчетной работы.

1. Доказать:

³ Указываются отдельно по уровням, в случае если формулировки ЗУВ различаются в зависимости от уровней сформированности компетенций.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
 b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$,
 c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
 d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$,
 e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
 f) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$,

2. Доказать:

- a) $2^n > 2n + 1 \quad (n \geq 3)$,
 b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,
 c) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$,
 d) $2!4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2$,
 e) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1$,
 f) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,
 g) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

3. Вычислить радиусы r_n , R_n вписанной и описанной окружностей правильного $2n$ -угольника с периметром p .
 4. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.

Примерные темы рефератов.

1. Общие принципы построения числовых систем.
2. Аксиоматическая теория натуральных чисел.
3. Принцип расширения числовой системы.
4. Построение кольца целых чисел.
5. Аксиоматическое построение системы целых чисел.

Примерные темы докладов.

1. Сложение натуральных чисел.
2. Умножение натуральных чисел.
3. Порядок на множестве натуральных чисел.
4. Различные формы метода математической индукции.
5. Категоричность теории Пеано.
6. Вычитание в произвольной алгебре.
7. Принцип расширения числовой системы.
8. Определение системы целых чисел.
9. Эквивалентные пары натуральных чисел.
10. Кольцо классов пар натуральных чисел.
11. Построение кольца целых чисел.
12. Порядок в кольце целых чисел.
13. Аксиоматическое построение системы целых чисел.
14. Деление в произвольной алгебре.
15. Определение системы рациональных чисел.

Ключи правильных ответов

Уметь: преподавать учебные курсы, дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4 на пороговом уровне⁴

Примерные темы докладов.

16. Эквивалентные дроби.
17. Поле классов дробей.
18. Построение поля рациональных чисел.
19. Строение упорядоченного поля рациональных чисел.
20. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
21. Задача заполнения числовой прямой.
22. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.
23. Сходящиеся последовательности рациональных чисел

⁴ Указываются отдельно по уровням, в случае если формулировки ЗУВ различаются в зависимости от уровней сформированности компетенций.

24. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
25. Порядок в поле классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4 на продвинутом уровне

Примерные темы докладов.

26. Построение поля действительных чисел.
27. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.
28. Определение системы комплексных чисел.
29. Поле пар действительных чисел.
30. Построение поля комплексных чисел.
31. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.
32. Линейные алгебры с делением над полем действительных чисел.
33. Теорема Фробениуса. Кватернионы

Примерные вопросы к зачету.

1. Опишите аксиоматический метод построения дедуктивных теорий, укажите характерные особенности полуформального аксиоматического метода. Опишите понятие модели полуформальной аксиоматической теории и приведите примеры теорий и их моделей.

2. Назовите практические источники возникновения понятия «число». Раскройте смысл понятия «числовая система». Укажите математические задачи, решение которых потребовало перехода от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел. Охарактеризуйте возможности дальнейшего расширения числовых систем.

3. Назовите первичные понятия полуформальной порядковой теории натуральных чисел. Сформулируйте аксиомы Пеано натурального ряда. Приведите символические записи аксиом 1–3 Пеано и их контрапозиционные варианты. Охарактеризуйте непротиворечивость и полноту теории Пеано. Для данного натурального числа определите следующее и предшествующее натуральное число. Докажите независимость каждой из аксиом Пеано от остальных.

4. Определите операцию сложения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность сложения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите ассоциативность и коммутативность сложения. Сформулируйте и докажите утверждения о сумме и слагаемом и о прибавлении одного числа к обеим частям равенства.

Примерные задания расчетной работы.

1. Доказать:

a) $2^n > 2n + 1 \quad (n \geq 3),$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$

c) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$

d) $2!4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2,$

e) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1,$

f) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$

g) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

Ключи правильных ответов

Владеть: навыками преподавания учебных курсов по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4 на пороговом уровне

2. Вычислить радиусы r_n , R_n вписанной и описанной окружностей правильного $2n$ -угольника с периметром p .
3. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.

Примерные темы докладов.

1. Сложение натуральных чисел.
2. Умножение натуральных чисел.
3. Порядок на множестве натуральных чисел.
4. Различные формы метода математической индукции.
5. Категоричность теории Пеано.
6. Вычитание в произвольной алгебре.
7. Принцип расширения числовой системы.
8. Определение системы целых чисел.
9. Эквивалентные пары натуральных чисел

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4 на продвинутом уровне

Примерные задания расчетной работы.

1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in \mathbb{N}$.
2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .
 $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, b = 6$.

Примерные темы для конспектов:

1. Аксиоматический метод построения дедуктивных теорий;
2. Отношения эквивалентности. Факторизация множества;
3. Отношения порядка;
4. Алгебра как алгебраическая система;
5. Упорядоченные алгебры;
6. Изоморфные алгебры;
7. Математические задачи, определившие переход от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел.
8. Математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел;
9. Математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел;
10. Непротиворечивость, полнота и независимость аксиом Пеано;
11. Операции сложения и умножения и их свойства;
12. Порядок на множестве натуральных чисел;
13. Свойство дискретности множества натуральных чисел.
14. Принцип наименьшего числа;
15. Категоричность теории Пеано;

Ключи правильных ответов

Промежуточная аттестация

СПК-2. И СПК-4 Способен квалифицированно толковать правовые акты, в том числе в ситуациях наличия пробелов и коллизий норм прав

Знать: дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования

Уметь: преподавать учебные курсы, дисциплины (модули) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

Владеть: навыками преподавания учебных курсов по образовательным программам в

образовательных организациях соответствующего уровня образования.

Задания, необходимые для оценивания сформированности СПК-2 и СПК-4

Перечень вопросов для зачета

3. Назовите первичные понятия полуформальной порядковой теории натуральных чисел. Сформулируйте аксиомы Пеано натурального ряда. Приведите символические записи аксиом 1–3 Пеано и их контрапозиционные варианты. Охарактеризуйте непротиворечивость и полноту теории Пеано. Для данного натурального числа определите следующее и предшествующее натуральное число. Докажите независимость каждой из аксиом Пеано от остальных.

4. Определите операцию сложения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность сложения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите ассоциативность и коммутативность сложения. Сформулируйте и докажите утверждения о сумме и слагаемом и о прибавлении одного числа к обеим частям равенства.

5. Определите операцию умножения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность умножения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите правую дистрибутивность, коммутативность и ассоциативность умножения. Сформулируйте и докажите утверждение об умножении на одно число обеих частей равенства. Опишите систему натуральных чисел как полукольцо.

6. Сформулируйте и докажите теорему о расположении натуральных чисел. Определите отношение «меньше» на множестве натуральных чисел. Докажите, что система натуральных чисел с отношением «меньше» есть упорядоченное полукольцо, опишите следствия этого факта. Докажите, что сумма натуральных чисел больше каждого слагаемого, а произведение не меньше каждого из множителей. Сформулируйте и докажите утверждение о первом элементе множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда. Определите дискретное и плотное множество, сформулируйте и докажите свойство дискретности множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип наименьшего числа, раскройте его роль в аксиоматике натурального ряда. Приведите развернутую характеристику системы натуральных чисел как упорядоченного полукольца.

7. Определите категоричную теорию. Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме систем Пеано. Раскройте методологическую сущность категоричности системы натуральных чисел.

8. Определите разность элементов в произвольной алгебре со сложением. Определите операцию «вычитание». Докажите, что в любом кольце вычитание определено. Покажите, что если разность двух натуральных чисел существует, то она единственная. Покажите, что в полукольце натуральных чисел вычитание не определено.

9. Опишите ситуации, в которых возникает необходимость расширения числовой системы. Сформулируйте принцип расширения числовой системы. Объясните, смысл словосочетаний «наименьшее расширение» и «расширение однозначно с точностью до изоморфизма».

10. Обоснуйте необходимость расширения полукольца натуральных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею симметризации множества натуральных чисел. Определите систему целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества

целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о распадении множества целых чисел на непересекающиеся подмножества. Сформулируйте и докажите теорему о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел.

11. Определите эквивалентность упорядоченных пар натуральных чисел, докажите, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Сформулируйте и докажите утверждение о прибавлении одного натурального к каждому элементу пары. Сформулируйте и докажите утверждение о парах с одинаковыми элементами. Сформулируйте и докажите утверждение о парах, первый элемент которых больше второго на 1. Сформулируйте и докажите утверждение о представителях эквивалентных пар; покажите единственность соответствующего представления. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности действий для пар.

12. Определите классы эквивалентных пар натуральных чисел, сформулируйте их основные свойства. Определите операции сложения и умножения классов пар натуральных чисел, обоснуйте корректность этих определений. Докажите, что множество всех классов пар образует коммутативное кольцо с единицей относительно операций сложения и умножения классов.

13. Опишите всевозможные виды классов пар натуральных чисел. Выделите в построенном кольце подалгебру. Установите изоморфизм между полукольцом натуральных чисел и подалгеброй. Постройте кольцо Z с помощью теоремы о продолжении изоморфизма, опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное кольцо Z удовлетворяет критерию кольца целых чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество целых чисел. Опишите целые числа 0 и 1 и покажите, что $0 \neq 1$. Докажите, что в кольце целых чисел нет делителей нуля; объясните смысл этого факта.

14. Определите отношения «меньше» на множестве целых чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между натуральными числами. Покажите, как соотносятся с нулем натуральные числа и числа, противоположные натуральным. Докажите, что кольцо целых чисел упорядочено отношением «меньше», укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда для кольца целых чисел; объясните его смысл. Докажите дискретность множества целых чисел. Покажите, что множество целых чисел не вполне упорядочено отношением «меньше». Приведите развернутую характеристику системы целых чисел как упорядоченного кольца.

15. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории целых чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории целых чисел; раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система целых чисел определяется как минимальное кольцо, являющееся расширением полукольца натуральных чисел. Раскройте связь конструктивно построенных колец и Z с аксиоматической теорией целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории целых чисел; объясните смысл этого факта.

16. Определите частное элементов в алгебре с умножением. Определите операцию «деление». Докажите, что в любом поле деление определено. Покажите, что если частное двух целых чисел существует, то оно единственное. Покажите, что в кольце целых чисел деление не определено.

17. Обоснуйте необходимость расширения кольца целых чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею расширения множества целых чисел. Определите систему рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества рациональных чисел.

18. Опишите всевозможные виды классов дробей. Выделите в поле подалгебру. Установите изоморфизм между кольцом целых чисел и алгеброй. Постройте поле Q с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное поле удовлетворяет критерию поля рациональных чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о представлении рациональных чисел в виде несократимых дробей.

19. Определите отношения и "меньше" на множестве рациональных чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между целыми числами. Докажите, что поле рациональных чисел упорядочено отношением "меньше", укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда для поля рациональных чисел; объясните его смысл. Докажите плотность множества рациональных чисел. Покажите, что множество рациональных чисел не вполне упорядочено отношением "меньше". Приведите развернутую характеристику системы рациональных чисел как упорядоченного поля.

20. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории рациональных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории рациональных чисел, раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система рациональных чисел определяется как минимальное поле, являющееся расширением кольца целых чисел. Раскройте связь конструктивно построенных полей с аксиоматической теорией рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории рациональных чисел.

21. Опишите всевозможные виды $\Phi\P$ рациональных чисел. Выделите в упорядоченном поле R подалгебру Q . Установите изоморфизм между упорядоченным полем рациональных чисел и подалгеброй Q . Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Докажите архимедовскую упорядоченность поля. Сформулируйте и докажите лемму о рациональных приближениях в поле. Докажите полноту поля. Обоснуйте вывод о том, что поле является полем действительных чисел.

22. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории действительных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории действительных чисел. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система действительных чисел определяется как непрерывное упорядоченное поле. Обоснуйте категоричность теории действительных чисел.

23. Обоснуйте необходимость расширения поля действительных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Определите систему комплексных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о стандартном виде комплексного числа.

24. Определите операции сложения и умножения пар действительных чисел. Докажите, что множество S пар действительных чисел образует поле относительно введенных операций сложения и умножения. Укажите нейтральные элементы по сложению и умножению в построенном поле, а также элементы, противоположные и обратные элементам данного поля.

25. Опишите всевозможные виды пар действительных чисел. Выделите в поле S подалгебру R . Установите изоморфизм между полем действительных чисел и подалгеброй R . Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Укажите "мнимую единицу" в поле. Покажите, что построенное поле S является полем комплексных чисел (удовлетворяет теореме о стандартном виде комплексного числа). Покажите, что поле комплексных чисел нельзя упорядочить.

26. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории комплексных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории комплексных чисел; опишите различные модели этой теории. Покажите категоричность теории комплексных чисел. Объясните, почему идея решения целых алгебраических уравнений не может служить основной для дальнейшего расширения числовых систем.

27. Определите линейную алгебру над произвольным полем. Определите линейную алгебру с делением над произвольным полем. Приведите примеры алгебр с делением над полем действительных чисел и укажите их размерность. Определите систему кватернионов как линейную алгебру с делением размерности 4 над полем действительных чисел.

28. Перечислите известные ассоциативные алгебры с делением над полем действительных чисел, укажите их размерность. Сформулируйте теорему Фробениуса. Раскройте смысл теоремы Фробениуса и ее роль в решении задачи последовательного расширения числовых систем.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций⁵

Формами текущего контроля являются устные опросы, выполнение расчетной работы, написание конспектов, реферата, заслушивание докладов. Для проведения промежуточной аттестации разработаны вопросы к зачету.

Общая оценка (100 баллов) складывается из оценки за текущий контроль (80 баллов), и оценки за зачет (20 баллов)

Требования к оформлению форм отчетности (критериев оценивания). Описание процедуры проведения промежуточной аттестации. Шкала оценивания на промежуточной аттестации. Итоговая шкала по дисциплине.

Шкала оценивания зачета.

Количество баллов	Критерии оценивания
19-20	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач
7-18	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
3-6	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
0-2	Если студент не ориентируется в теоретическом материале, не знает большинство формулировок основных определений, теорем и свойств и не умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

⁵ Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

