МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Физико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии
Протокол от «9» февраля 2023 г., № 6
Зав. кафедрой__________________ /Кондратьева Г.В./

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине (модулю)
Избранные вопросы высшей математики

Направление подготовки (специальности)

44.03.05 Педагогическое образование

Профиль (программа подготовки, специализация)
Математика и физика

Мытищи
2023

Содержание

1.Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы[1]

[1] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
ПК-1 – способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	1. Работа на учебных занятиях. 2. Самостоятельная работа.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания[2]

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
ПК-1	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях. 2. Самостоятельная работа.	Знать основные понятия и теоремы Уметь решать изученные задачи	Домашнее задание. Устный опрос. Контрольная работа. Курсовая работа.	Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрольной работы.
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях. 2. Самостоятельная работа.	Знать: понятия и теоремы с доказательствами. Уметь: решать задачи, творчески используя полученные знания. Владеть: теоретическими знаниями и практическими умениями, применяя их в предметной области при решении профессиональных задач.	Домашнее задание. Устный опрос. Контрольная работа	Шкала оценивания домашнего задания. Шкала оценивания устного опроса. Шкала оценивания контрольной работы.

[2] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

Шкала оценивания домашнего задания

Показатель	Баллы
Студент правильно выполнил 0 – 10% домашнего задания	0
Студент правильно выполнил 11 – 20% домашнего задания	1
Студент правильно выполнил 21 – 40% домашнего задания	2
Студент правильно выполнил 41 – 60% домашнего задания	3
Студент правильно выполнил 61 – 80% домашнего задания	4
Студент правильно выполнил 81 – 100% домашнего задания	5

Шкала оценивания устного опроса

Критерий оценивания	Баллы
Студент ответил на вопрос и показал полное и уверенное знание темы	5
Студент ответил на вопрос, однако в ответе присутствуют несущественные ошибки, недостатки и недочёты	4
Студент в целом ответил на вопрос, но в ответе имеются заметные и грубые ошибки, недостатки и недочёты	3
Студент не ответил на вопрос, но имеются более двух правильных идей или подходов к правильному ответу	2
Студент не ответил на вопрос, но имеются только одна-две идеи или подходы к правильному ответу	1
Студент не ответил на вопрос и показал полное незнание темы задания	0

Шкала оценивания контрольной работы

Показатель	Баллы
Студент правильно выполнил 0 – 2% всех заданий	0
Студент правильно выполнил 3 – 5% всех заданий	1
Студент правильно выполнил 6 – 10% всех заданий	2
Студент правильно выполнил 11 – 15% всех заданий	3
Студент правильно выполнил 16 – 20% всех заданий	4
Студент правильно выполнил 21 – 25% всех заданий	5
Студент правильно выполнил 26 – 30% всех заданий	6
Студент правильно выполнил 31 – 35% всех заданий	7
Студент правильно выполнил 36 – 40% всех заданий	8
Студент правильно выполнил 41 – 45% всех заданий	9
Студент правильно выполнил 46 – 50% всех заданий	10
Студент правильно выполнил 51 – 55% всех заданий	11
Студент правильно выполнил 56 – 60% всех заданий	12
Студент правильно выполнил 61 – 65% всех заданий	13
Студент правильно выполнил 66 – 70% всех заданий	14
Студент правильно выполнил 71 – 75% всех заданий	15
Студент правильно выполнил 76 – 80% всех заданий	16
Студент правильно выполнил 81 – 85% всех заданий	17
Студент правильно выполнил 86 – 90% всех заданий	18
Студент правильно выполнил 91 – 95% всех заданий	19
Студент правильно выполнил 96 – 100% всех заданий	20

3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Текущий контроль

ПК-1 – способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач
Знать основные понятия и теоремы

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на пороговом уровне[3]

Примерные домашние задания

Семестр 7

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:
   а) $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$; в) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$; г) $\int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

2. Вычислить двойной интеграл:
   а) $\iint\limits_D (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D=\{1\le x\le 3,\ x\le y\le x^3\}$;
   б) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D=\{x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$;
   в) $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D=\{x^2+y^2\le 16,\ x\le y\le x\sqrt{3}\}$;
   г) $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D=\{x^2+y^2\le 2x,\ y\ge 0\}$.

3. Вычислить тройной интеграл:
   а) $\iiint\limits_H xz(1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;
   б) $\iiint\limits_H (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x,\ y\le z\le 2y\}$;
   в) $\iiint\limits_H xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;
   г) $\iiint\limits_H (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{x^2+y^2+z^2\le 9,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\}$.

---

[3] Указываются отдельно по уровням, в случае если формулировки ЗУВ различаются в зависимости от уровней сформированности компетенций.

4. Вычислить криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода:

а) $\int\limits_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x - 3x\,\mathrm{d}y$, где $\Gamma = \{x = \sin t,\ y = \cos t,\ 0 \le t \le \pi\}$, обход контура по возрастанию t;

б) $\int\limits_{\Gamma} x^2\,\mathrm{d}l$, где $\Gamma = \{x = \sqrt{8}\cos t,\ y = \sqrt{8}\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le \pi\}$;

в) $\int\limits_{\Gamma} xy^3\,\mathrm{d}y$, где $\Gamma = \{y = (x^2+1)^{1/4},\ 0 \le x \le 2\}$, обход контура по возрастанию x;

г) $\int\limits_{\Gamma} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}l$, где $\Gamma = \{x = \ln(1+t^2),\ y = 2\operatorname{arctg} t - t,\ 0 \le t \le 1\}$.

. Примерные вопросы устного опроса

Семестр 5(очная форма обучения), семестр 6 (заочная форма обучения)

1. Что такое квадрируемая фигура? Привести примеры квадрируемых фигур на плоскости.
2. Что такое двойной интеграл? Каковы необходимое и достаточное условия существования двойного интеграла? Каковы основные свойства двойного интеграла?
3. Что такое повторный интеграл? В каких случаях двойной интеграл сводится к повторному интегралу?
4. Как осуществляется замена переменных интегрирования в двойном интеграле? Что такое якобиан замены? Чему равен двойной интеграл в полярных координатах?
5. Как вычисляют массу плоской фигуры? Как вычисляют площадь плоской фигуры, ограниченной линиями?
6. Что такое криволинейный сектор и криволинейный сегмент? Как вычисляют их площади?
7. Что такое интеграл Пуассона, как его вычисляют и чему он равен?
8. Что такое кубируемая фигура? Привести примеры кубируемых фигур в пространстве.
9. Что такое тройной интеграл, и каковы необходимое и достаточное условия его существования?
10. Каковы основные свойства тройного интеграла? Как его сводят к повторному интегралу?
11. Как выполняют замену переменных в тройном интеграле? Как выглядит тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах?
12. Как применяют тройной интеграл для вычисления объёмов тел? Что такое параллельные сечения и как их используют при вычислении объёма тела?
13. Что такое криволинейный шаровой сектор и криволинейный шаровой сегмент? Чему равны их объёмы?
14. Как применяют тройные интегралы для вычисления массы тела с переменной плотностью?
15. Что такое спрямляемая кривая? Привести примеры спрямляемых кривых в пространстве.
16. Что такое криволинейный интеграл 1-го рода (по длине дуги)? Каково достаточное условие его существования?
17. Каковы основные свойства и как вычисляют криволинейный интеграл 1-го рода?
18. Что такое криволинейный интеграл 2-го рода (по координате точки дуги)?
19. Каковы основные свойства криволинейных интегралов 2-го рода? Как вычисляют криволинейные интегралы 2-го рода?
20. Что такое положительное (против часовой стрелки) и отрицательное (по часовой стрелке) направления обхода кривой на плоскости? Какова формула Остроградского – Грина?

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на продвинутом уровне

Семестр 6(очная форма обучения), семестр 7 (заочная форма обучения)

1. Докажите неравенство треугольника, используя аксиоматику Вейля.
2. Докажите на основании аксиом I – III аксиоматики Д. Гильберта теорему о равенстве вертикальных углов.
3. Используя аксиоматику Вейля, докажите, что в евклидовой геометрии не существует прямой, пересекающей все стороны треугольника.
4. Докажите теорему о сумме углов треугольника в аксиоматике А.Д. Александрова.
5. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1=(1,2,1)$, $\mathbf{e}_1=(2,3,3)$, $\mathbf{e}_1=(3,7,1)$ линейного пространства к базису $\mathbf{g}_1=(3,1,4)$, $\mathbf{g}_2=(5,2,1)$, $\mathbf{g}_3=(1,1,-6)$ этого пространства.
6. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов **a** и **b**: $\mathbf{a}_1=(1,2,1,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,1,1,3)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1,3)$, $\mathbf{a}_4=(3,-5,7,2)$; $\mathbf{b}_1=(1,1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(3,3,3,3)$.
7. Найти матрицу **A** линейного оператора f линейного пространства $\mathbf{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ значение $f(\mathbf{x})$ равно

   $f(\mathbf{x})=(2x_1+x_2,\ x_2-2x_3,\ 3x_1-4x_2-5x_3)$.
8. Найти матрицу **A** линейного оператора fg линейного пространства $\mathbf{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ значения $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ равны

   $f(\mathbf{x})=(x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_3+x_1)$, $\quad g(\mathbf{x})=(x_2,\ x_3,\ x_1+x_2+x_3)$.

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

1. Линейное преобразование f в некотором базисе задано матрицей $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{pmatrix}$. Найти в этом базисе матрицу обратного линейного преобразования f^{-1}.
2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\-1&1&5\end{pmatrix}$.
3. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортонормированных базисов: $\mathbf{a}_1=(1,1,1,2)$, $\mathbf{a}_2=(2,3,5,-5)$.
4. Найти длины сторон и углы треугольника ABC в пространстве $\mathbf{R}^5$, если $A=(2,4,2,4,2)$, $B=(6,4,4,4,6)$, $C=(5,7,5,7,2)$.
5. Найти проекцию вектора $\mathbf{x}=(4,-1,-3,4)$ на подпространство L и ортогональную составляющую вектора **x**, если $\mathrm{L}=\{(1,1,1,1),\ (1,2,2,-1),\ (1,0,0,3)\}$.

6. Привести симметричную матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ к виду $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{-1}$, где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, а $\mathbf{Q}$ – ортогональная матрица.

Уметь решать задачи, творчески используя полученные знания

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на пороговом уровне[4]

Семестр 6(очная форма обучения), семестр 7 (заочная форма обучения)

1. Докажите свойства параллельных прямых:

   а) если прямая a параллельна прямой b в заданном направлении, то прямая b также параллельна a в том же направлении;

   б) две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении.

2. Докажите, что в системе аксиом Гильберта каждое из следующих предложений эквивалентно аксиоме параллельности:

   а) сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым;

   б) если различные прямые a и b не перпендикулярны, то перпендикуляр, проведённый в любой точке прямой a, пересекает прямую b;

   в) каковы бы ни были три различные прямые, всегда существует прямая, отличная от данных прямых и пересекающая все три прямые в трех различных точках.

3. Используя аксиоматику Вейля, докажите:

   а) теорему о средней линии треугольника; б) теорему косинусов; в) теорему синусов;

   г) теорему о двух перпендикулярах; д) теорему о трёх перпендикулярах.

4. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

   а) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 3)$; $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, -3)$.

   б) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$; $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$.

5. Найти матрицу $\mathbf{A}$ линейного оператора f линейного пространства $\mathbf{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ значение $f(\mathbf{x})$ равно

   а) $f(\mathbf{x}) = (x_2, x_3, x_1 + 2x_2)$; б) $f(\mathbf{x}) = (5x_1 + 2x_2 - x_3, 0, x_1 + x_3)$; в) $f(\mathbf{x}) = (x_2, x_3, x_1 + x_2)$.

6. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Является ли оператор $f(\mathbf{x})$ линейным?

---

[4] Указываются отдельно по уровням, в случае если формулировки ЗУВ различаются в зависимости от уровней сформированности компетенций.

а) $f(\mathbf{x})=(x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1)$; б) $f(\mathbf{x})=(|x_1|, x_2+x_3, x_2-x_3)$; в) $f(\mathbf{x})=(x_2^3, x_3, x_1)$;

г) $f(\mathbf{x})=(5x_1-4x_2-3x_3, 1, x_2^4+2x_3)$; д) $f(\mathbf{x})=(x_1+3x_2-2x_3, x_1+x_2-x_3, 5x_2+6x_3)$.

7. Используя свойство сохранения ранга при изоморфном отображении, найти ранг следующих систем векторов в соответствующих пространствах:

   а) $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

   б) $f_1(x)=1+2x+x^2+2x^3$, $f_2(x)=-1+3x+4x^2+5x^3$, $f_3(x)=-5+2x^2+3x^3$.

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

1. Линейное преобразование f в некотором базисе задано матрицей $\mathbf{A}$. Найти в этом базисе матрицу обратного линейного преобразования f^{-1}, если

   а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 5\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 8\end{pmatrix}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований f, заданных в некотором базисе матрицами $\mathbf{A}$:

   а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$; г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

3. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортонормированных базисов:

   а) $\mathbf{a}_1=(1,-2,2,-3)$; $\mathbf{a}_2=(2,-3,2,4)$. б) $\mathbf{a}_1=(1,1,1,2)$; $\mathbf{a}_2=(1,2,3,-3)$.

   в) $\mathbf{a}_1=(2,1,2)$; $\mathbf{a}_2=(1,2,-2)$. г) $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1)$; $\mathbf{a}_2=(1,1,-1,-1)$.

4. Найти расстояние от точки, заданной вектором $\mathbf{x}$, до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

   а) $\mathbf{x}=(4,2,-5,1)$; $\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3+2x_4=9,\\ 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=12.\end{cases}$ б) $\mathbf{x}=(2,4,-4,2)$; $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=1,\\ x_1+3x_2+x_3-3x_4=2.\end{cases}$

5. Привести симметричную матрицу $\mathbf{A}$ к виду $\mathbf{A}=\mathbf{QDQ}^{-1}$, где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, а $\mathbf{Q}$ – ортогональная матрица, если

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 2\\ -3 & 2 & -2\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$; г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на продвинутом уровне

Примерные темы курсовых работ

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

1. Происхождение и развитие понятия функции.
2. Идея предела в Древности. Понятие предела – фундамент математического анализа.
3. Различные подходы к определению предела функции.
4. Непрерывность и равномерная непрерывность функций.
5. Происхождение и развитие понятия производной.
6. Метод флюксий и бесконечных рядов И. Ньютона.
7. Исчисление бесконечно малых у Г.В. Лейбница.
8. Основные теоремы дифференциального исчисления и их применения.
9. Применение дифференциального исчисления к исследованию поведения функций.
10. Непрерывность и дифференцирование элементарных функций.
11. Применение теории экстремумов к решению геометрических задач.
12. Применение теории экстремумов к решению прикладных задач.
13. Формула Тейлора и ее приложения.
14. Интеграционные методы Архимеда и их развитие. Формирование понятия интеграла в 17 веке.
15. Происхождение понятия определенного интеграла.
16. Вопросы существования определенного интеграла.
17. Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.
18. Несобственные интегралы.
19. Геометрические приложения определенных интегралов.
20. Физические приложения определенных интегралов.
21. Теоремы Гульдена.
22. Повторные пределы функции нескольких переменных.
23. Исследование функции нескольких переменных на непрерывность.
24. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
25. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
26. Основные свойства равномерно сходящихся рядов.
27. Признаки равномерной сходимости рядов.
28. Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
29. Необходимое и достаточное условия разложимости функции в ряд Тейлора.
30. Ряды Фурье.
31. Преобразование Фурье.

Владеть: теоретическими знаниями и практическими умениями, применяя их в предметной области при решении профессиональных задач.
Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на пороговом уровне

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

6. Линейное преобразование f в некотором базисе задано матрицей **A**. Найти в этом базисе матрицу обратного линейного преобразования f^{-1}, если

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&5\\0&0&-1\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&4&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&6&5\\1&0&0\end{pmatrix}$. г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{pmatrix}$.

7. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований *f*, заданных в некотором базисе матрицами **A**:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$; г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

8. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортонормированных базисов:

а) $\mathbf{a}_1=(1,-2,2,-3)$; $\mathbf{a}_2=(2,-3,2,4)$. б) $\mathbf{a}_1=(1,1,1,2)$; $\mathbf{a}_2=(1,2,3,-3)$.

в) $\mathbf{a}_1=(2,1,2)$; $\mathbf{a}_2=(1,2,-2)$. г) $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1)$; $\mathbf{a}_2=(1,1,-1,-1)$.

9. Найти расстояние от точки, заданной вектором **x**, до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

а) $\mathbf{x}=(4,2,-5,1)$; $\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3+2x_4=9,\\2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=12.\end{cases}$ б) $\mathbf{x}=(2,4,-4,2)$; $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=1,\\x_1+3x_2+x_3-3x_4=2.\end{cases}$

10. Привести симметричную матрицу **A** к виду **A** = $\mathbf{QDQ}^{-1}$, где **D** – диагональная матрица, а **Q** – ортогональная матрица, если

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&2&2\\-3&2&-2\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&1&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$; г) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3&1&4\\1&9&2\\4&2&3\end{pmatrix}$.

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1 на продвинутом уровне

Примерные задания контрольной работы

Семестр 8

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int\limits_{y^3}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2-4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D=\{4\le x^2+y^2\le 25,\ x\le y\}$.
3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{H}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{x+2y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$.
4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{H}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где $H=\{x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0\}$.
5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int\limits_{\Gamma}y\cos x\,\mathrm{d}l$, где $\Gamma=\{y=\sin x,\ 0\le x\le \pi/2\}$.

6. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода $\int\limits_{\Gamma} x^{-1}\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + y^{-1}\mathrm{d}z$, где $\Gamma = \left\{x = t^2,\, y = t^3,\, z = t^4,\, 1 \le t \le 2\right\}$, обход контура по возрастанию *t*.

Семестр 6(очная форма обучения), семестр 7 (заочная форма обучения)

1. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида.
2. Критика системы Евклида. Пятый постулат Евклида.
3. Н.И. Лобачевский и его геометрия.
4. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I-II; I-V.
5. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому.
6. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.
7. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского. Окружность, эквидистанта и орицикл.
8. Понятие о математической структуре. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом.
9. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского.
10. Система аксиом Гильберта.
11. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.
12. Луч, угол, отрезок. Равенство отрезков и углов. Длина отрезка.
13. Аксиоматика А.В. Погорелова школьного курса геометрии. Об аксиомах школьного курса геометрии.
14. Определение и свойства линейного пространства. Арифметическое n-мерное линейное пространство.
15. Базис и координаты вектора в базисе. Преобразование координат. Матрица перехода.
16. Определение подпространства. Критерий подпространства. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений.
17. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Линейное многообразие.
18. Понятие и свойства изоморфизма линейных пространств. Теоремы об изоморфизме линейных пространств.
19. Определение, свойства, примеры линейных операторов. Теорема о задании линейного оператора.
20. Матрица линейного оператора в базисе. Связь матриц в различных базисах.
21. Действия над линейными операторами.

Примерные вопросы к экзамену

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

1. Обратимые линейные операторы.
2. Ядро и образ линейного оператора, ранг и дефект.
3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Спектр линейного оператора.
4. Характеристическое уравнение линейного оператора, его инвариантность (независимость от выбора базиса).
5. Критерий существования у линейного оператора матрицы диагонального вида.
6. Линейные операторы с простым спектром.

7. Ортогональные системы векторов.
8. Ортогональные и ортонормированные базисы.
9. Процесс ортогонализации базиса.
10. Ортогональное дополнение к подпространству.
11. Симметричные линейные операторы.
12. Ортогональные линейные операторы.
13. Приведение матрицы симметричного линейного оператора к диагональному виду.
14. Расстояние от точки до линейного многообразия в евклидовом пространстве.
15. Наименьший угол между вектором и линейным подпространством.
16. Понятие линейного преобразования евклидова пространства.
17. Ортогональные преобразования.

Примерные темы курсовых работ

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

32. Происхождение и развитие понятия функции.
33. Идея предела в Древности. Понятие предела – фундамент математического анализа.
34. Различные подходы к определению предела функции.
35. Непрерывность и равномерная непрерывность функций.
36. Происхождение и развитие понятия производной.
37. Метод флюксий и бесконечных рядов И. Ньютона.
38. Исчисление бесконечно малых у Г.В. Лейбница.
39. Основные теоремы дифференциального исчисления и их применения.
40. Применение дифференциального исчисления к исследованию поведения функций.
41. Непрерывность и дифференцирование элементарных функций.
42. Применение теории экстремумов к решению геометрических задач.
43. Применение теории экстремумов к решению прикладных задач.
44. Формула Тейлора и ее приложения.
45. Интеграционные методы Архимеда и их развитие. Формирование понятия интеграла в 17 веке.
46. Происхождение понятия определенного интеграла.
47. Вопросы существования определенного интеграла.
48. Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.
49. Несобственные интегралы.
50. Геометрические приложения определенных интегралов.
51. Физические приложения определенных интегралов.
52. Теоремы Гульдена.
53. Повторные пределы функции нескольких переменных.
54. Исследование функции нескольких переменных на непрерывность.
55. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
56. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
57. Основные свойства равномерно сходящихся рядов.
58. Признаки равномерной сходимости рядов.
59. Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
60. Необходимое и достаточное условия разложимости функции в ряд Тейлора.
61. Ряды Фурье.
62. Преобразование Фурье.

Промежуточная аттестация

ПК-1. способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач

Знать: понятия и теоремы с доказательствами.
Уметь: решать задачи, творчески используя полученные знания.
Владеть: теоретическими знаниями и практическими умениями, применяя их в предметной области при решении профессиональных задач.

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК-1

Семестр 6(очная форма обучения), семестр 7 (заочная форма обучения)

22. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида.
23. Критика системы Евклида. Пятый постулат Евклида.
24. Н.И. Лобачевский и его геометрия.
25. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I-II; I-V.
26. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому.
27. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.
28. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского. Окружность, эквидистанта и орицикл.
29. Понятие о математической структуре. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом.
30. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского.
31. Система аксиом Гильберта.
32. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.
33. Луч, угол, отрезок. Равенство отрезков и углов. Длина отрезка.
34. Аксиоматика А.В. Погорелова школьного курса геометрии. Об аксиомах школьного курса геометрии.
35. Определение и свойства линейного пространства. Арифметическое n-мерное линейное пространство.
36. Базис и координаты вектора в базисе. Преобразование координат. Матрица перехода.
37. Определение подпространства. Критерий подпространства. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений.
38. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Линейное многообразие.
39. Понятие и свойства изоморфизма линейных пространств. Теоремы об изоморфизме линейных пространств.
40. Определение, свойства, примеры линейных операторов. Теорема о задании линейного оператора.
41. Матрица линейного оператора в базисе. Связь матриц в различных базисах.
42. Действия над линейными операторами.

Примерные вопросы к экзамену

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

18. Обратимые линейные операторы.
19. Ядро и образ линейного оператора, ранг и дефект.
20. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Спектр линейного оператора.
21. Характеристическое уравнение линейного оператора, его инвариантность (независимость от выбора базиса).
22. Критерий существования у линейного оператора матрицы диагонального вида.
23. Линейные операторы с простым спектром.
24. Ортогональные системы векторов.
25. Ортогональные и ортонормированные базисы.
26. Процесс ортогонализации базиса.
27. Ортогональное дополнение к подпространству.
28. Симметричные линейные операторы.
29. Ортогональные линейные операторы.
30. Приведение матрицы симметричного линейного оператора к диагональному виду.
31. Расстояние от точки до линейного многообразия в евклидовом пространстве.
32. Наименьший угол между вектором и линейным подпространством.
33. Понятие линейного преобразования евклидова пространства.
34. Ортогональные преобразования.

Примерные темы курсовых работ

Семестр 7(очная форма обучения), семестр 8 (заочная форма обучения)

63. Происхождение и развитие понятия функции.
64. Идея предела в Древности. Понятие предела – фундамент математического анализа.
65. Различные подходы к определению предела функции.
66. Непрерывность и равномерная непрерывность функций.
67. Происхождение и развитие понятия производной.
68. Метод флюксий и бесконечных рядов И. Ньютона.
69. Исчисление бесконечно малых у Г.В. Лейбница.
70. Основные теоремы дифференциального исчисления и их применения.
71. Применение дифференциального исчисления к исследованию поведения функций.
72. Непрерывность и дифференцирование элементарных функций.
73. Применение теории экстремумов к решению геометрических задач.
74. Применение теории экстремумов к решению прикладных задач.
75. Формула Тейлора и ее приложения.
76. Интеграционные методы Архимеда и их развитие. Формирование понятия интеграла в 17 веке.
77. Происхождение понятия определенного интеграла.
78. Вопросы существования определенного интеграла.
79. Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.
80. Несобственные интегралы.
81. Геометрические приложения определенных интегралов.
82. Физические приложения определенных интегралов.
83. Теоремы Гульдена.
84. Повторные пределы функции нескольких переменных.

85. Исследование функции нескольких переменных на непрерывность.
86. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
87. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
88. Основные свойства равномерно сходящихся рядов.
89. Признаки равномерной сходимости рядов.
90. Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
91. Необходимое и достаточное условия разложимости функции в ряд Тейлора.
92. Ряды Фурье.
93. Преобразование Фурье.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций[5]

Требования к оформлению форм отчетности (критериев оценивания). Описание процедуры проведения промежуточной аттестации. Шкала оценивания на промежуточной аттестации. Итоговая шкала по дисциплине.

Шкала оценивания ответов студентов на зачете

Количество баллов	Критерии оценивания
16 – 20	имеет место полное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать все теоремы из лекционного курса и решает все задачи и примеры из приведенных заданий
12 – 15	имеет место основное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать основные теоремы из лекционного курса и решает основные задачи и примеры из приведенных заданий
8 – 11	имеет место знание без доказательства основных теорем и формул курса; студент умеет решать задачи и примеры из приведенных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики
0 – 7	имеет место неусвоение основных теорем и формул курса; студент не умеет решать задачи и примеры из заданных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики

Шкала оценивания ответов студентов на зачете с оценкой

Количество баллов	Критерии оценивания
25 – 30	имеет место полное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать все теоремы из лекционного курса и решает все задачи и примеры из приведенных заданий
19 – 24	имеет место основное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать основные теоремы из

[5] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

	лекционного курса и решает основные задачи и примеры из приведенных заданий
13 – 18	имеет место знание без доказательства основных теорем и формул курса; студент умеет решать задачи и примеры из приведенных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики
0 – 12	имеет место неусвоение основных теорем и формул курса; студент не умеет решать задачи и примеры из заданных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики

Шкала оценивания ответов студентов на экзамене

Количество баллов	**Критерии оценивания**
25 – 30	имеет место полное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать все теоремы из лекционного курса и решает все задачи и примеры из приведенных заданий
19 – 24	имеет место основное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать основные теоремы из лекционного курса и решает основные задачи и примеры из приведенных заданий
13 – 18	имеет место знание без доказательства основных теорем и формул курса; студент умеет решать задачи и примеры из приведенных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики
0 – 12	имеет место неусвоение основных теорем и формул курса; студент не умеет решать задачи и примеры из заданных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики

Шкала оценивания курсовой работы

Количество баллов	**Критерии оценивания**
81 – 100	Студент: – подробно разобрал теоретический и практический материал, относящийся к теме своей курсовой работы; – овладел всеми понятиями; – умеет доказывать все теоремы, задачи и примеры из своей курсовой работы; – выступает на защите уверенно, отвечает подробно на поставленные вопросы.
61 – 80	Студент: – подробно разобрал теоретический и практический материал, относящийся к теме своей курсовой работы; – практически овладел всеми понятиями; – умеет доказывать практически все теоремы, задачи и примеры из своей курсовой работы;

	– выступает на защите уверенно, отвечает на поставленные вопросы.
41 – 60	Студент: – разобрал основной теоретический и практический материал, относящийся к теме своей курсовой работы; – овладел большинством понятий; – не умеет доказывать большинство теорем, задач и примеров из своей курсовой работы; – выступает на защите неуверенно, отвечает не на все поставленные вопросы.
0 – 40	Студент: – не разобрал основной теоретический и практический материал, относящийся к теме своей курсовой работы; – не овладел большинством понятий; – не умеет доказывать теоремы, задачи и примеры из своей курсовой работы; – выступает на защите неуверенно, не отвечает на поставленные вопросы.

Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины

Итоговая оценка по дисциплине формируется из суммы баллов по результатам текущего контроля и промежуточной аттестации и выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей.

Оценка по 100-балльной системе	Оценка по традиционной системе
81 – 100	Отлично
61 – 80	Хорошо
41 – 60	Удовлетворительно
0 – 40	Неудовлетворительно