

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Наумова Наталия Александровна

Должность: Ректор

Дата подписания: 04.07.2025 11:47:39

Уникальный программный ключ:

6b5279da4e034bffa679172803da5b7b559fc69e2

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»

(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Физико-математический факультет

Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

Согласовано

деканом физико-математического факультета

«19» марта 2025 г.

/Кулешова Ю.Д./

Рабочая программа дисциплины

Основные структуры алгебры

Направление подготовки

44.03.01 Педагогическое образование

Профиль:

Математика

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Согласовано учебно-методической комиссией
физико-математического факультета

Протокол от «19» марта 2025 г. № 7

Председатель УМКом

/Кулешова Ю.Д./

Рекомендовано кафедрой высшей
алгебры, математического анализа и
геометрии

Протокол от «18» января 2025 г. № 5

Зав. кафедрой

/Кондратьева Г.В./

Москва

2025

Автор-составитель:
Пинчук Ирина Александровна, кандидат физико-математических наук,
доцент

Рабочая программа дисциплины «Основные структуры алгебры» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ России от 22.02.2018 г. № 121.

Дисциплина входит в часть формируемую участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)», и является элективной дисциплиной.

Год начала подготовки (по учебному плану) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1. Планируемые результаты обучения	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы	5
3. Объем и содержание дисциплины	5
4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся	6
5. Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации по дисциплине	8
6. Учебно-методическое и ресурсное обеспечение дисциплины	17
7. Методические указания по освоению дисциплины	19
8. Информационные технологии для осуществления образовательного процесса по дисциплине	19
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины	20

1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

1.1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины по выбору «Основные структуры алгебры» является формирование у студентов алгебраической культуры, овладение ими основными алгебраическими понятиями, актуальными в современной математической науке и так необходимыми учителю математики.

Задачи дисциплины:

- знакомство студентов с основными современными алгебраическими понятиями и закономерностями;
- формирование у студентов представлений о современной теории групп, колец, полей и алгебр;
- знакомство с основными приемами алгебраических рассуждений и доказательств.

1.2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в часть формируемую участниками образовательных отношений Блока «Дисциплины (модули)», и является элективной дисциплиной.

Для освоения дисциплины «Основные структуры алгебры» студенты используют знания, умения, навыки, полученные и сформированные в ходе изучения дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Элементарная математика».

Изучение дисциплины «Основные структуры алгебры» является базой для дальнейшего освоения студентами дисциплины «Методика обучения математике», «Дискретная математика», «Избранные вопросы высшей математики».

3. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Объем дисциплины

Показатель объема дисциплины	Кол-во часов
Объем дисциплины в зачетных единицах	3
Объем дисциплины в часах	108
Контактная работа:	56,3
Лекции	18
Практические занятия	36
Контактные часы на промежуточную аттестацию:	2,3
Экзамен	0,3
Предэкзаменационная консультация	2
Самостоятельная работа	42
Контроль	9,7

Форма промежуточной аттестации: экзамен в 6 семестре.

3.2. Содержание дисциплины

	Кол-во часов
--	--------------

Наименование разделов (тем) дисциплины	Лекции	Практические занятия
Тема 1. Основные алгебраические структуры и их гомоморфизмы Алгебраическая операция и ее свойства. Понятие алгебраической структуры как множества с алгебраическими операциями. Понятие группы и подгруппы, их свойства. Смежные классы по подгруппе. Конечные группы. Теорема Лагранжа и ее следствие. Нормальные подгруппы, критерий нормальной подгруппы. Гомоморфизмы групп, примеры и свойства. Эпиморфизмы, мономорфизмы и изоморфизмы. Ядро и образ гомоморфизма. Теорема Кэли о подгруппах симметрической группы. Степень элемента в группе. Циклические группы. Факторгруппа и теорема о гомоморфизмах групп. Понятие кольца и подкольца. Идеалы колец, главные идеалы. Евклидовы кольца. Факторкольцо. Гомоморфизмы колец и теорема о гомоморфизмах колец.	5	10
Тема 2. Делимость в коммутативных кольцах с 1. Определение и примеры коммутативных колец с 1. Делимость в кольцах, свойства делимости. Делимость и идеалы коммутативных колец.	3	6
Тема 3. Факториальные кольца и кольца многочленов над факториальным кольцом. Простые и составные элементы целостного кольца. Определение и примеры факториальных колец. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное элементов факториального кольца. Делимость идеалов. Теория делимостив кольце главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов и евклидовых колец. Факториальность колец многочленов над факториальным кольцом. Примитивные многочлены и лемма Гаусса.	4	8
Тема 4. Линейные алгебры и их примеры. Определение и примеры линейной алгебры и подалгебры. Структурные константы линейной алгебры. Определение и примеры алгебры Ли как линейной алгебры. Алгебры Ли малой размерности над полем комплексных чисел	3	6
Тема 5. Теория расширения полей и существование корня многочлена. Простое и составное расширение поля. Алгебраические и трансцендентные над полем элементы. Строение простого алгебраического расширения поля. Изоморфизм простых алгебраических расширений поля, полученных присоединением корня одного и того же неприводимого многочлена. Существование корня неприводимого над полем многочлена. Изоморфизм трансцендентных расширений поля.	3	6
Итого	18	36

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Темы для самостоятельного изучения	Изучаемые вопросы	Кол-во часов	Формы самостоятельной работы	Методическое обеспечение	Формы отчетности
------------------------------------	-------------------	--------------	------------------------------	--------------------------	------------------

Тема 1. Алгебры Ли и их универсальные обертывание алгебры	Универсальное свойство Прямое построение Частные примеры Описание структуры	12	Изучение научно-методической литературы	Рекомендуемая научная литература, сеть Интернет	Устный опрос, реферат
Тема 2. Булевы алгебры, их свойства и интерпритации	Булевы высказывания Таблицы истинности Операции булевой алгебры Сложные формулы Классификация формул Правило равноистинности Тавтологии Правило замены подформулы Правило замены переменной Перестановки Цепочки формул Приведение подобных членов	14	Изучение научно-методической литературы	Рекомендуемая научная литература, сеть Интернет	Устный опрос, реферат
Тема 3. Теория делимости в коммутативных кольцах	Отношение делимости, его свойства. Область целостности. Идеалы, их свойства. Примеры колец, не являющихся кольцами главных идеалов. Обратимые элементы. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель. Свойства наибольшего общего делителя в кольце главных идеалов. Взаимно простые элементы. Евклидовы кольца. Алгоритм Евклида и линейное представление наибольшего общего делителя в евклидовых кольцах. Простые, неприводимые и составные элементы кольца. Неприводимость простых элементов в области целостности. Простота неприводимых элементов в кольцах главных идеалов. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители в	16	Изучение научно-методической литературы	Рекомендуемая научная литература, сеть Интернет	Устный опрос, реферат

	кольце главных идеалов. Сравнимость по модулю идеала. Свойства. Классы вычетов. Построение кольца классов вычетов по модулю идеала. Кольцо классов вычетов по максимальному идеалу - поле. Конструкция поля комплексных чисел как кольца классов вычетов. Расширения полей. Присоединение корней многочлена. Поле разложения. Построение поля частных области целостности. Поле рациональных функций. Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби				
Итого		42			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа
ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа

5.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
-------------------------	--------------------------	-------------------	----------------------	---------------------	------------------

УК-1	Порог овый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятел ьная работа	Знать основы системного подхода и основные приемы разрешения проблемных ситуаций Уметь осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	Устный опрос, семестровое задание, контрольная работа, реферат	Шкала оценивания устного опроса Шкала оценивания семестровог о задания Шкала оценивания контрольной работы Шкала оценивания реферата
	Прод винут ый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятел ьная работа	Знать основы системного подхода и основные приемы разрешения проблемных ситуаций Уметь осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий Владеть методами критического анализа проблемных ситуаций на основе системного подхода, способами разработки стратегии действий	Устный опрос, семестровое задание, контрольная работа, реферат	Шкала оценивания устного опроса Шкала оценивания семестровог о задания Шкала оценивания контрольной работы Шкала оценивания реферата
ПК-1	Порог овый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятел ьная работа	<i>Знать:</i> содержание профессиональных задач, знать как осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач <i>Уметь:</i> пользоваться языком ма- тематики; вести информационно- аналитическую и ин- формационно-библио- графическую работу с привлечением современных технологий, логично и грамотно формулировать и	Устный опрос, семестровое задание, контрольная работа, реферат	Шкала оценивания устного опроса Шкала оценивания семестровог о задания Шкала оценивания контрольной работы Шкала оценивания реферата

			высказывать свои мысли, аргументировать свою точку зрения		
Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	<i>Знать:</i> содержание профессиональных задач, знать как осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач <i>Уметь:</i> пользоваться языком математики; вести информационно-аналитическую и информационно-библиографическую работу с привлечением современных технологий, логично и грамотно формулировать и высказывать свои мысли, аргументировать свою точку зрения, адаптировать результаты изучения понятий и фактов алгебры и теории чисел к школьному образовательному процессу <i>Владеть:</i> научным стилем изложения содержания, навыками поиска, сбора, систематизации и использования информации,	Устный опрос, семестровое задание, контрольная работа, реферат	Шкала оценивания устного опроса Шкала оценивания семестрового задания Шкала оценивания контрольной работы Шкала оценивания реферата	

			методами и приемами устного и письменного изложения предметного материала его жизненного цикла;		
--	--	--	---	--	--

Шкала оценивания устного опроса.

Критерий оценивания	Баллы
Материал изложен последовательно и грамотно, сделаны необходимые обобщения и выводы	5
Материал изложен последовательно и грамотно, сделаны необходимые обобщения и выводы, но допущены несущественные неточности, исправленные самим студентом.	4
Материал изложен неполно, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, при этом студент делает необходимые обобщения и выводы	3
Не раскрыто основное содержание учебного материала, студент демонстрирует незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допускает ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые им не исправляются после нескольких замечаний преподавателя	1-2

Шкала оценивания контрольной работы.

Критерий оценивания	Баллы
Если студент правильно решил все задания и обосновал полученные результаты	9-10 баллов
Если студент правильно решил все задания, но не смог обосновать полученные результаты	7-8 баллов
Если студент правильно решил 60% - 80% всех заданий, но не смог обосновать полученные результаты	6 баллов
Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал полученные результаты	5 баллов
Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал не все полученные результаты	2-4 балла
Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и смог обосновать полученные результаты	1 балл
Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и не смог обосновать полученные результаты	0 баллов

Шкала оценивания реферата.

	Критерии
9-10 баллов	Реферат по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы, презентация адекватно отражает содержание реферата
7-8	реферат по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение

баллов	излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы, но нет презентации
4-6 баллов	реферат по теме удовлетворяет требованиям на оценку в 3 баллов, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация
1-3 балла	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
0 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

Шкала оценивания семестрового задания.

Критерий оценивания	Баллы
Если студент правильно решил все задания и обосновал полученные результаты	8-10 баллов
Если студент правильно решил 60% - 80% всех заданий, но не смог обосновать полученные результаты	5-7 баллов
Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал не все полученные результаты	2-4 балла
Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и смог обосновать полученные результаты	1 балл
Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и не смог обосновать полученные результаты	0 баллов

5.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вопросы для проведения устных опросов.

1. Дайте определение группы
2. Какими свойствами обладает группа
3. Дайте определение гомоморфизма групп
4. Сформулируйте теорему о гомоморфизмах
5. Приведите примеры изоморфных групп
6. Приведите примеры циклических групп
7. Как определяется степень элемента в группе
8. Дайте определение кольца
9. Дайте определение поля
10. Сформулируйте свойства кольца
11. Сформулируйте свойства поля
12. Какие элементы называются делителями нуля
13. Дайте определение гомоморфизма колец
14. Дайте определение подкольца и идеала кольца

15. Приведите примеры основных структур

Примерный список вопросов к экзамену.

1. Виды алгебраических операций и их свойства.
2. Группа, подгруппа, их свойства.
3. Левые (правые) смежные классы группы по подгруппе.
4. Конечные группы. Теорема Лагранжа и следствие из нее.
5. Нормальные подгруппы. Критерий нормальной подгруппы.
6. Гомоморфизмы групп и их свойства. Виды гомоморфизмов.
7. Ядро и образ гомоморфизмов групп, их свойства.
8. Степень элемента в группе, свойства степени.
9. Циклические группы. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
10. Факторгруппа. Примеры факторгрупп.
11. Теорема о гомоморфизмах групп.
12. Кольцо, подкольцо, их свойства.
13. Правые, левые, двусторонние идеалы колец.
14. Делимость в коммутативных кольцах с единицей.
15. Главные идеалы кольца, кольцо главных идеалов.
16. Теория делимости в кольце главных идеалов.
17. Евклидовы кольца.
18. Факторкольцо, примеры факторколец.
19. Гомоморфизмы колец и их свойства, примеры.
20. Поле, подполе. Характеристика поля.
21. Поле частных целостного кольца.
22. Простые и составные элементы целостных колец.
23. Определение и примеры факториальных колец

Примерные темы рефератов.

1. Симметрическая группа и ее подгруппы
2. Примеры конечных групп малых порядков
3. История создания теории групп
4. Группа Галуа
5. Линейные алгебры
6. Простые расширения полей
7. Трансцендентное расширение поля
8. Характеристика поля и поля ненулевой характеристики

Контрольная работа №1.

1. Доказать, что любая конечная циклическая группа порядка n изоморфна группе Z_n .
2. Доказать, что для конечной циклической группы обращение теоремы Лагранжа верно, т.е. если $n = |\langle a \rangle|$ и $n : k$, то существует подгруппа H группы $\langle a \rangle$ такая, что $|H| = k$.
3. Доказать, что отношение изоморфизма в классе всех групп является отношением эквивалентности.
4. Пусть $f : G \rightarrow G'$ - гомоморфизм групп. Доказать, что f - мономорфизм тогда и только тогда, когда $\text{Ker } f = \{1\}$ и f - эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\text{Im } f = G'$.
5. Доказать, что если $f : G \rightarrow G'$ - гомоморфизм групп и H - подгруппа в группе G , то

$f(H)$ является подгруппой в G' .

6. Доказать, что если $f: G \rightarrow G'$ - гомоморфизм группы G на группу G' и при этом G абелева, то и G' абелева. Верно ли обратное утверждение?

Контрольная работа №2.

7. Доказать, что для произвольной подгруппы мультипликативной группы элементы, обратные к элементам левого смежного класса, образуют правый смежный класс.

8. Пусть $G = (GL_n(R), \cdot)$, $H = (SL_n(R), \cdot)$. Вычислить G/H .

9. Доказать, что множество R^* обратимых элементов кольца R с единицей является мультипликативной группой.

10. Доказать, что обратимый элемент кольца не может быть делителем нуля.

11. Доказать, что делителями нуля в кольце матриц над полем являются матрицы с нулевым определителем, и только они.

12. Доказать, что пересечение любого множества идеалов кольца R является идеалом того же кольца.

Примерный вариант семестрового задания.

1. Определить какие из операций f являются алгебраическими на следующих множествах A , какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны?

1) $A = 2\mathbb{N} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

а) f сложение натуральных чисел,

б) f умножение натуральных чисел.

2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$

а) f сложение натуральных чисел,

б) f умножение натуральных чисел.

3) $A = \mathbb{R} - \{0\}$

а) f сложение вещественных чисел,

б) f умножение вещественных чисел.

4) $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

а) f сложение вещественных чисел,

б) f умножение вещественных чисел.

5) $A = \{1\}$

а) f сложение натуральных чисел,

б) f умножение натуральных чисел.

6) $A = \{0, 1\}$

а) f сложение целых чисел,

б) f умножение целых чисел.

2. Укажите какие из следующих операций f являются алгебраическими на множестве $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны?

1) $afb = \frac{a+b}{2}$,

2) $afb = a + b - 1$,

3) $afb = ab^2$,

4) $afb = a^b$,

5) $afb = \sqrt{ab}$,

6) $afb = \log_a b$,

7) $afb = \max\{a, b\}$,

8) $afb = |a - b|$.

3. Доказать, что операция f на множестве $\mathbb{N}$ алгебраическая и ассоциативна, если:

- 1) $afb = \text{НОД}(a, b)$,
- 2) $afb = \text{НОК}(a, b)$,
- 3) $afb = \min\{a, b\}$,
- 4) $afb = a$,
- 5) $afb = 1$.

4. Указать, какие из следующих множеств относительно указанных операций f являются группами.

- 1) $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{Z}\}$, f – обычное умножение.
- 2) $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$, f – обычное умножение.
- 3) $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, f – обычное умножение.
- 4) $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, f – обычное умножение.
- 5) $A = \mathbb{Q}\{0\}$, f – обычное умножение.
- 6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$, f – обычное умножение.
- 7) $A = 2\mathbb{Z}$, f – обычное умножение.
- 8) $\left\{x \mid x = \frac{a}{7^k}, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$, f – обычное умножение.

5. Доказать что каждое из следующих множеств с заданной операцией f (с помощью таблицы Кэли), является группой:

1. $A = \{e, a\}$

f	e	a
e	e	a
a	a	e

2. $A = \{e, a, b\}$

f	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

6. Доказать, что каждое из следующих числовых множеств с обычным сложением и умножением является кольцом (полем).

- 1) $\mathbb{Z}$,
- 2) $2\mathbb{Z}$,
- 3) $\mathbb{Q}$,
- 4) $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}\}$
- 5) $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\}$

7. Доказать, что множество $a = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ со следующими операциями сложения и умножения является коммутативным кольцом с единицей:

- 1) $(a_i; b_i) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$,
 $(a_i; b_i) \cdot (a_2; b_2) = (a_1 \cdot a_2; b_1 \cdot b_2)$,
- 2) $(a_1; b_1) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$,
 $(a_i; b_i) \cdot (a_2; b_2) = (a_i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$

Указать в каждом из этих колец обратимые элементы. В кольце с делителем нуля найти все делители нуля.

8. Выписать все перестановки 1) трёх элементов, 2) четырёх элементов.

9. Найти число инверсий в следующей перестановке и указать четность перестановки:

$$2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1.$$

10. Найти произведение подстановок:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-2}.$$

11. Найти подстановку X , если

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Найти частные и остатки при делении на 7 следующих чисел:

3, 5, 10, 35, 100, 0, -1, -7, -12, -50.

13. Найти частное и остатки при делении на -8 следующих чисел:

4, 6, 11, 32, 99, 0, -2, -15, -35.

14. Построить кольца $Z_{10}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{15}, Z_{17}$. Указать в них:

- 1) для каждого элемента противоположный элемент;
- 2) указать все обратимые элементы и для каждого из них обратный элемент;
- 3) показать, что все обратимые элементы в данном кольце мультипликативную группу;
- 4) указать среди перечисленных колец поля;
- 5) в каждом из указанных колец указать делители нуля.

15. Пусть $M = \left\{ x \mid x = \frac{a}{2^k}, a \in \mathbb{Z}, R \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$. Будет ли кольцом (полем) структура на M относительно обычных операций сложения и умножения вещественных чисел?

16. Доказать, что каждое из следующих числовых множеств с обычным сложением и умножением является кольцом:

- 1) $M = \{x \mid x = a + bi\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}\},$
- 2) $M = \{x \mid x = a + bi, a, b = 3\mathbb{Z}\},$
- 3) $\left\{ x \mid x = \frac{a + bi\sqrt{3}}{2}, a \text{ и } b \text{ целые числа одинаковой чётности} \right\}$

Какие из этих колец содержат единицу? В таких кольцах укажите обратимые элементы.

17. Докажите, что каждое из следующих множеств матриц с обычным сложением и умножением является кольцом:

- 1) $M = \text{Mat}(n; \mathbb{Q})$
- 2). $M = \text{Mat}(n; \mathbb{R})$
- 3) $M = \text{Mat}(n; \mathbb{C})$
- 4). $M = \text{Mat}(n; \mathbb{Z})$
- 4) $M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$
- 5) $M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$
- 6) $M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}$

$$7) M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}, a, b, - \text{целые числа одинаковой чётности} \right\}$$

$$8) M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$9) M = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}.$$

Какие из этих колец коммутативны? Какие содержат единицу? В таких кольцах укажите обратимые элементы. В кольцах с делителем нуля найдите все делители нуля.

18. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \text{ в } \mathbb{Z}_5 & \quad 2) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \text{ в } \mathbb{Z}_7, & \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \text{ в } \mathbb{Z}_3. \\ 4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \text{ в } \mathbb{Z}_2. & \quad 5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \text{ в } \mathbb{Z}_5. \end{aligned}$$

19. Доказать, что любая конечная циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.

20. Доказать, что для конечной циклической группы обращение теоремы Лагранжа верно, т.е. если $n = |\langle a \rangle|$ и $n : k$, то существует подгруппа H группы $\langle a \rangle$ такая, что $|H| = k$.

21. Доказать, что отношение изоморфизма в классе всех групп является отношением эквивалентности.

22. Пусть $f : G \rightarrow G'$ - гомоморфизм групп. Доказать, что f - мономорфизм тогда и только тогда, когда $\text{Ker } f = \{1\}$ и f - эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\text{Im } f = G'$.

23. Доказать, что если $f : G \rightarrow G'$ - гомоморфизм групп и H - подгруппа в группе G , то $f(H)$ является подгруппой в G' .

24. Доказать, что если $f : G \rightarrow G'$ - гомоморфизм группы G на группу G' и при этом G абелева, то и G' абелева. Верно ли обратное утверждение?

25. Доказать, что для произвольной подгруппы мультипликативной группы элементы, обратные к элементам левого смежного класса, образуют правый смежный класс.

26. Пусть $G = (GL_n(R), \cdot)$, $H = (SL_n(R), \cdot)$. Вычислить G/H .

27. Доказать, что множество R^* обратимых элементов кольца R с единицей является мультипликативной группой.

28. Доказать, что обратимый элемент кольца не может быть делителем нуля.

29. Доказать, что делителями нуля в кольце матриц над полем являются матрицы с нулевым определителем, и только они.

30. Доказать, что пересечение любого множества идеалов кольца R является идеалом того же кольца.

5.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Итоговая оценка знаний, умений, способов деятельности студентов по изучаемой дисциплине составляет 100 баллов

Максимальное количество баллов, которое можно набрать за текущий контроль – 70 баллов.

За ответы на вопросы устного опроса обучающийся может набрать максимально 25 баллов.

За выполнение реферата обучающийся может набрать максимально 15 баллов.

За выполнение самостоятельной работы обучающийся может набрать максимально - 15 баллов.

За выполнение контрольной работы обучающийся может набрать максимально - 15 баллов.

Максимальная сумма баллов, которые обучающийся может набрать при сдаче экзамена, составляет 30 баллов.

Для сдачи экзамена необходимо выполнить все задания текущего контроля. Значимым моментом является показатель изучения материала лекций и выполнение заданий в указанные сроки. На зачет выносятся материал, излагаемый в лекциях и рассматриваемый на практических занятиях.

Шкала оценивания экзамена

Количество баллов	Критерии оценивания
26-30	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач
15-25	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
8-14	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
0-7	Если студент не ориентируется в теоретическом материале, не знает большинство формулировок основных определений, теорем и свойств и не умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины

Итоговая оценка по дисциплине формируется из суммы баллов по результатам текущего контроля и промежуточной аттестации и выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей.

Оценка по 100-балльной системе	Оценка по традиционной системе
81 – 100	отлично

61 - 80	хорошо
41 - 60	удовлетворительно
0 - 40	неудовлетворительно

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Основная литература

1. **Курош, А.Г.** Лекции по общей алгебре: учебник для вузов / А. Г. Курош. - 3-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2019. - 556с. – Текст: непосредственный.
2. **Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры: учебник для вузов / А. Г. Курош. - 19-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2019. - 432с. – Текст: непосредственный.
3. **Пинчук, И.А.** Основные структуры алгебры: учеб. пособие для физ.-мат. фак. / И. А. Пинчук. - М. : МГОУ, 2016. - 64с. – Текст: непосредственный.
4. Смолин Ю.Н. Смолин Ю.Н., Алгебра и теория чисел: учеб. пособие / Ю.Н. Смолин - М. : ФЛИНТА, 2017. - 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976500501.html> - (дата обращения 22.11.2024). – Режим доступа: для автоиз. Пользователей ЭБС Консультант студента. – Текст: электронный.

6.2. Дополнительная литература

1. **Фаддеев, Д.К.** Лекции по алгебре: Учеб. пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. - 5-е изд ; стереотип. - СПб. : Лань, 2007. - 416с. – Текст: непосредственный.
2. **Александров, П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию : учеб. пособие / П. С. Александров. - 2-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2010. - 368с.- Текст: непосредственный.
3. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру: учебник для вузов. ч.2. линейная алгебра / А. И. Кострикин. - 3-е изд. - М. : Физматлит, 2004. - 368с. – Текст: непосредственный.
4. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру: учебник для вузов . ч.1. основы алгебры / А. И. Кострикин. - 2-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2004. - 272с. – Текст: непосредственный.
5. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру: учебник для вузов. ч.3. основ. структуры алгебры / А. И. Кострикин. - М. : Физ-мат. лит., 2000. - 272с. – Текст: непосредственный.
6. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - Москва : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140> (дата обращения 22.11.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» . — Текст : электронный.
7. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - Москва : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144> (дата обращения 22.11.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» . — Текст : электронный.
8. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - Москва : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951> (дата обращения 22.11.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» . — Текст : электронный.

9. **Шилин И.А.** Алгебра: алгебраические структуры : учеб.пособие для матем.спец.пед.вузов / И. А. Шилин. - 2-е изд.,доп. - М. : Альфа, 2002. - 91с. – Текст: непосредственный.
10. Баврин, И.И. Математика: учебник для вузов / И. И. Баврин. - 10е изд.,стереотип. - М. : Академия, 2013. - 624с. – Текст: непосредственный.
11. Глухов, М.М. Алгебра : учебник / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-1961-6. — URL: <https://e.lanbook.com/book/67458> (дата обращения: 22.11.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей Электронно-библиотечная система «Лань» . — Текст : электронный.
12. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М.: 2004.
13. Арнольд В.И. Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий. – М.: МЦНМО, 2003. – 44 с.
14. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
15. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры, М., 1990.
16. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
17. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. М., Наука, 1980.
18. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1979.
19. Верецагин Н.К., Шень А. Начала теории множеств, МЦНМО, 2002.
20. Джекобсон Н. Алгебры Ли, М., Мир, 1964.
21. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1993.
22. Колосов В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики, М., «Гелиос АРВ», 2001.
23. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры, М.: Наука, 1983.
24. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру.М.: Мир, 1979.

6.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. <http://www.alleng.ru>
2. <http://www.twirpx.com>
3. Научная электронная библиотека.
4. <http://elibrary.ru>
5. <http://www.znaniyum.com>
6. <http://www.pedlib.ru>
7. <http://www.gnpbu.ru>
8. <http://www.rsl.ru/ru/s2/s101>
9. <http://lib.walla.ru>
10. <http://www.iqlib.ru>

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям.
2. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы по дисциплинам.

8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Лицензионное программное обеспечение:

Microsoft Windows

Microsoft Office

Kaspersky Endpoint Security

Информационные справочные системы:

Система ГАРАНТ

Система «КонсультантПлюс»

Профессиональные базы данных

fgosvo.ru – Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования

pravo.gov.ru - Официальный интернет-портал правовой информации

www.edu.ru – Федеральный портал Российское образование

Свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства
ОМС Плеер (для воспроизведения Электронных Учебных Модулей)

7-zip

Google Chrome

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: учебной мебелью, доской, демонстрационным оборудованием, персональными компьютерами, проектором;
- помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде.