

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Наумова Наталия Александровна  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 24.10.2024 14:21:41  
Уникальный программный ключ:  
6b5279da4e034bffa679172803da5b7b5586c68e3

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ**  
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области  
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
(МГОУ)

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и геометрии

Согласовано управлением организации и  
контроля качества образовательной  
деятельности  
«22» июня 2021 г.  
Начальник управления \_\_\_\_\_

/ Г.Е. Суслин /

Одобрено учебно-методическим советом

Протокол «22» июня 2021 г. № 5

Председатель \_\_\_\_\_

/ О.А. Шестакова /



**Рабочая программа дисциплины**

**Векторный и тензорный анализ**

**Направление подготовки**

03.03.02 Физика

**Квалификация**

Бакалавр

**Форма обучения**

Очная

Согласовано учебно-методической комиссией  
физико-математического факультета:

Протокол от «17» июня 2021 г. № 12

Председатель УМКом \_\_\_\_\_

/Барабанова Н.Н./

Рекомендовано кафедрой математического  
анализа и геометрии

Протокол от «10» июня 2021 г. № 11

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

/Кондратьева Г.В./

Мытищи  
2021

Авторы-составители:

Бедрикова Е.А.

доцент кафедры математического анализа и геометрии,  
кандидат физико-математических наук

Зверев Н.В.

доцент кафедры математического анализа и геометрии,  
кандидат физико-математических наук

Рабочая программа дисциплины «Векторный и тензорный анализ» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 Физика, утвержденного приказом МИНОБР-НАУКИ РОССИИ от 07.08.2020 г. № 891.

Дисциплина входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений и является обязательной для изучения.

Год начала подготовки 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ .....                                                           | 4  |
| 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ<br>ПРОГРАММЫ .....                                 | 4  |
| 3. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....                                                             | 5  |
| 4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ<br>РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ .....                     | 7  |
| 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И<br>ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ..... | 9  |
| 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ<br>ДИСЦИПЛИНЫ .....                                 | 17 |
| 7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .....                                              | 18 |
| 8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ<br>ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....    | 18 |
| 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....                                            | 18 |

# **1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ**

## **1.1. Цель и задачи дисциплины**

**Целью освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ»** является формирование знаний и понятий в области математического анализа применительно к векторным пространствам, его роли и месте в системе естественных и математических наук.

### **Задачи дисциплины:**

- изучение основных понятий и теорем векторного и тензорного анализа;
- их использование в различных дисциплинах математики, физики и естественных наук.

## **1.2. Планируемые результаты обучения**

В результате освоения данной дисциплины у обучающихся формируется следующая компетенция:

ДПК-2 – Способен освоить современные концепции, теории, законы и методы в области физики, математики и информатики, овладеть основными методами решения задач, сформулированными в рамках данных предметных областей, и применить их в профессиональной деятельности.

# **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ**

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений и является обязательной для изучения.

Программа дисциплины «Векторный и тензорный анализ» построена таким образом, что её основные понятия и методы являются составной частью программы курсов «Математический анализ», «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия» и органично переходят в этот курс. Эта дисциплина является основой для изучения дисциплин теоретической физики.

Компетенции, знания, навыки и умения, полученные в ходе изучения дисциплины, должны всесторонне использоваться и развиваться студентами в процессе последующей профессиональной деятельности при использовании высшей математики для решения профессиональных задач.

Знание современных фундаментальных научных положений естествознания, его мировоззренческих и методологических выводов является необходимым элементом подготовки специалистов в любой области деятельности.

Методы, изучаемые в курсе, представляют собой примеры и задачи, исследуемые в математической и теоретической физике. Это обстоятельство приводит к формированию у студентов элементов высокой математической культуры, необ-

ходимой для научно-исследовательской работы.

Знания, полученные при изучении курса «Векторный и тензорный анализ» широко применяются в курсе общей физики при изучении кинематики и динамики механического движения, электростатики, электричества и магнетизма, также в курсах теоретической механики, электродинамики и физической кинетики. Кроме того, полученные в результате освоения дисциплины методы могут использоваться в дальнейшем в педагогической деятельности.

### 3. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Объем дисциплины

| Показатель объема дисциплины                        | Форма обучения |
|-----------------------------------------------------|----------------|
|                                                     | Очная          |
| Объем дисциплины в зачетных единицах                | 4              |
| Объем дисциплины в часах                            | 144            |
| <b>Контактная работа:</b>                           | 92,3           |
| Лекции                                              | 30             |
| Практические занятия                                | 60             |
| <b>Контактные часы на промежуточную аттестацию:</b> | 2,3            |
| Предэкзаменационная консультация                    | 2              |
| Экзамен                                             | 0,3            |
| <b>Самостоятельная работа</b>                       | 42             |
| <b>Контроль</b>                                     | 9,7            |

Форма промежуточной аттестации: экзамен в 4 семестре.

#### 3.2. Содержание дисциплины

| Наименование разделов (тем)<br>дисциплины с кратким содержанием                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Количество часов |                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|---------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Лекции           | Практические работы |
| <b>Тема 1. Векторная алгебра и элементы дифференциальной геометрии.</b><br>Скалярные и векторные величины. Вектор и его характеристики. Системы координат, базис в двухмерном и трёхмерном пространстве. Координаты вектора, разложение вектора по базису. Операции сложения и умножения векторов (скалярное, векторное и диадное). Умножение трёх и более век- | 3                | 6                   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----|
| торов, смешанное произведение. Понятие векторной функции. Зависимость вектора от скалярного аргумента. Радиус-вектор точки в пространстве. Годограф радиус-вектора. Дифференцирование векторных функций. Дифференциал радиус-вектора.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |   |    |
| <b>Тема 2. Скалярные поля</b><br>Скалярные и векторные поля. Линии уровня и поверхности уровня скалярного поля. Градиент скалярного поля. Символический дифференциальный оператор Гамильтона. Скорость изменения скалярного поля в заданном направлении. Максимальная скорость изменения скалярного поля. Направление вектора градиента скалярного поля. Свойства оператора Гамильтона. Оператор Гамильтона применительно к сумме и произведению скалярных функций.                                                                                                                                                           | 4 | 8  |
| <b>Тема 3. Векторные поля</b><br>Понятие векторного поля. Векторные линии (линии тока). Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока вектора через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского – Гаусса, связь поверхностного и объёмного интегралов. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса, связь интегралов по поверхности и замкнутому контуру. Понятие ротора векторного поля и его физический смысл. Скалярные, векторные и диадные операции с оператором Гамильтона.                                                                                            | 4 | 8  |
| <b>Тема 4. Специальные виды полей</b><br>Потенциальные, консервативные, центральные, соленоидальные, лапласовы поля. Свойства соленоидальных полей, основанные на понятии векторной трубки. Примеры лапласовых полей. Краевые задачи.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 3 | 6  |
| <b>Тема 5. Криволинейные системы координат</b><br>Понятие криволинейных систем координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Базис, взаимный базис, связь базисов. Координатные линии и поверхности. Метрический тензор и его представление с помощью диадиков. Изменение метрического тензора при переходе к новой системе координат. Тензоры произвольного ранга и произвольной ко- и контрвариантности. Преобразование тензоров при переходе от старых систем координат к новым системам координат.                                                                                                           | 6 | 12 |
| <b>Тема 6. Дифференциальные операции в криволинейных координатах</b><br>Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля первого и второго рода. Вычисление символов Кристоффеля для цилиндрической и сферической систем координат. Пример вычисления производной от векторной функции в цилиндрической системе координат. Ковариантное дифференцирование и его свойства. Ковариантная производная метрического тензора и тензора Леви – Чивиты.                                                                                                                                                                      | 4 | 8  |
| <b>Тема 7. Тензорная алгебра</b><br>Тензоры нулевого и первого ранга. Тензоры произвольного ранга и произвольной валентности. Операции сложения тензоров. Скалярное, векторное и диадное умножения и связанное с этим понятие свертки тензора. Понятия транспонирования, симметрирования и альтернирования тензоров. Декартовы тензоры. Тензоры второго ранга. Операции сложения, умножения, транспонирования, симметрирования для тензоров второго ранга. Инварианты тензора первого ранга. Инварианты тензора второго ранга. Приведение тензора второго ранга к главным осям. Теорема Кэли – Гамильтона и степени тензоров. | 4 | 8  |
| <b>Тема 8. Приложения тензорного анализа</b><br>Появление некоторых тензоров в механике деформируемого твердого тела                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2 | 4  |

|                                                                                                                                      |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|
| и в гидромеханике. Тензор напряжений, тензор деформаций, тензор скоростей деформаций. Понятие шаровой и девиаторной частей тензоров. |    |    |
| Итого                                                                                                                                | 30 | 60 |

#### 4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

| №  | Темы для самостоятельного изучения                      | Изучаемые вопросы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Кол-во часов | Формы самостоят. работы                          | Методическое обеспечение             | Формы отчетности           |
|----|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. | Векторная алгебра и элементы дифференциальной геометрии | Скалярные и векторные величины. Разложение вектора по базису.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3            | Поиск информации в книгах                        | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание и реферат |
| 2. | Скалярные поля                                          | Скалярные и векторные поля. Линии уровня и поверхности уровня скалярного поля. Градиент скалярного поля. Символический дифференциальный оператор Гамильтона. Скорость изменения скалярного поля в заданном направлении. Максимальная скорость изменения скалярного поля. Направление вектора градиента скалярного поля. Свойства оператора Гамильтона. Оператор Гамильтона применительно к сумме и произведению скалярных функций.                                                            | 6            | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание           |
| 3. | Векторные поля                                          | Понятие векторного поля. Векторные линии (линии тока). Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока вектора через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского – Гаусса, связь поверхностного и объёмного интегралов. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса, связь интегралов по поверхности и замкнутому контуру. Понятие ротора векторного поля и его физический смысл. Скалярные, векторные и диадные операции с оператором Гамиль- | 6            | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание           |

|    |                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |                                                  |                                      |                            |
|----|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
|    |                                                       | тона.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |   |                                                  |                                      |                            |
| 4. | Специальные виды полей                                | Потенциальные, консервативные, центральные, соленоидальные, лапласовы поля. Свойства соленоидальных полей, основанные на понятии векторной трубки. Примеры лапласовых полей. Краевые задачи.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4 | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание           |
| 5. | Криволинейные системы координат                       | Понятие криволинейных систем координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Базис, взаимный базис, связь базисов. Координатные линии и поверхности. Метрический тензор и его представление с помощью диадиков. Изменение метрического тензора при переходе к новой системе координат. Тензоры произвольного ранга и произвольной ко- и контр-вариантности. Преобразование тензоров при переходе от старых систем координат к новым системам координат.                                                                                                                        | 8 | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание и реферат |
| 6. | Дифференциальные операции в криволинейных координатах | Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля первого и второго рода. Вычисление символов Кристоффеля для цилиндрической и сферической систем координат. Пример вычисления производной от векторной функции в цилиндрической системе координат. Ковариантное дифференцирование и его свойства. Ковариантная производная метрического тензора и тензора Леви – Чивиты.                                                                                                                                                                                                          | 6 | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание           |
| 7. | Тензорная алгебра                                     | Тензоры нулевого и первого ранга. Тензоры произвольного ранга и произвольной валентности. Операции сложения тензоров. Скалярное, векторное и диадное умножения и связанное с этим понятие свертки тензора. Понятия транспонирования, симметрирования и альтернирования тензоров. Декартовы тензоры. Тензоры второго ранга. Операции сложения, умножения, транспонирования, симметрирования для тензоров второго ранга. Инварианты тензора первого ранга. Инварианты тензора второго ранга. Приведение тензора второго ранга к главным осям. Теорема Кэли – Гамильтона и степени тензоров. | 6 | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание           |

|    |                               |                                                                                                                                                                                                           |           |                                                  |                                      |                            |
|----|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 8. | Приложения тензорного анализа | Появление некоторых тензоров в механике деформируемого твердого тела и в гидромеханике. Тензор напряжений, тензор деформаций, тензор скоростей деформаций. Понятие шаровой и девиаторной частей тензоров. | 3         | Изучение теоретического материала, поиск решений | Основная и дополнительная литература | Домашнее задание и реферат |
|    | <b>Итого</b>                  |                                                                                                                                                                                                           | <b>42</b> |                                                  |                                      |                            |

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 5.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

| Код и наименование компетенции                                                                                                                                                                                                                                         | Этапы формирования                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| ДПК-2 – «Способен освоить современные концепции, теории, законы и методы в области физики, математики и информатики, овладеть основными методами решения задач, сформулированными в рамках данных предметных областей, и применить их в профессиональной деятельности» | 1. Работа на учебных занятиях.<br>2. Самостоятельная работа. |

### 5.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

| Оцениваемые компетенции | Уровень сформированности | Этап формирования                                           | Описание показателей                                                                                                                                      | Критерии оценивания                                                                                                           | Шкала оценивания |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| ДПК-2                   | Пороговый                | 1. Работа на учебных занятиях<br>2. Самостоятельная работа. | <i>Знать:</i> теорию векторного и тензорного анализа.<br><i>Уметь:</i> решать соответствующие задачи.<br><i>Владеть:</i> основными методами решения задач | Контроль посещения занятий; проверка конспекта, домашних заданий; устные опросы, контрольная работа; защита реферата; экзамен | 41-60            |
|                         | Продвинутый              | 1. Работа на учебных занятиях                               | <i>Знать:</i> теорию векторного и тензорного анализа.                                                                                                     | Контроль посещения занятий; проверка кон-                                                                                     | 61-100           |

| Оцениваемые компетенции | Уровень сформированности | Этап формирования          | Описание показателей                                                                             | Критерии оценивания                                                                   | Шкала оценивания |
|-------------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
|                         |                          | 2. Самостоятельная работа. | <i>Уметь:</i> решать соответствующие задачи.<br><i>Владеть:</i> основными методами решения задач | спекта, домашних заданий; устные опросы, контрольная работа; защита реферата; экзамен |                  |

### Критерии и шкала оценивания практических работ

| Критерий оценивания                                        | Баллы   |
|------------------------------------------------------------|---------|
| Студент правильно выполнил 0 – 25% всех домашних заданий   | 0 – 3   |
| Студент правильно выполнил 26 – 50% всех домашних заданий  | 4 – 7   |
| Студент правильно выполнил 51 – 75% всех домашних заданий  | 8 – 11  |
| Студент правильно выполнил 76 – 100% всех домашних заданий | 12 – 15 |
| Максимальное количество баллов                             | 15      |

### Критерии и шкала оценивания конспекта

| Критерии оценивания                   | Баллы |
|---------------------------------------|-------|
| Студент написал 0 – 10% всех лекций   | 0     |
| Студент написал 11 – 20% всех лекций  | 1     |
| Студент написал 21 – 40% всех лекций  | 2     |
| Студент написал 41 – 60% всех лекций  | 3     |
| Студент написал 61 – 80% всех лекций  | 4     |
| Студент написал 81 – 100% всех лекций | 5     |
| Максимальное количество баллов        | 5     |

## 5.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

### Пример домашнего задания

1. Разложить вектор  $\mathbf{x}$  по векторам  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{x} = \{-9, 5, 5\}$ ,  $\mathbf{p} = \{4, 1, 1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{2, 0, -3\}$ ,  $\mathbf{r} = \{-1, 2, 1\}$ .
2. Найти векторную линию поля  $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ .
3. Найти угол  $\varphi$  между градиентами скалярных полей  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $v = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  в точке  $M(0, 0, 1)$ .
4. Найти поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в 1-ом октанте, если нормаль к плоскости образует острый угол с осью  $OZ$ .

5. Найти  $\operatorname{rot}(r^6 \mathbf{a})$  и  $\operatorname{div}(r^4 \mathbf{a})$ , где  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{a} = \text{const}$ .
6. Найти потенциал векторного поля  $\mathbf{a} = (6xy - 2x)\mathbf{i} + (3x^2 - 2z)\mathbf{j} + (1 - 2y)\mathbf{k}$ .

### Примерные задания контрольной работы

1. Из векторов  $\mathbf{a} = \{6, -4, -5\}$ ,  $\mathbf{b} = \{3, 3, 2\}$ ,  $\mathbf{c} = \{-1, -5, 1\}$  и  $\mathbf{d} = \{4, 5, -2\}$  выделить аффинный базис и разложить по этому базису вектор  $\mathbf{r} = \{3, -3, 8\}$ .
2. Найти смешанное произведение векторов  $\mathbf{a} = \{3, 4, 5\}$ ,  $\mathbf{b} = \{-3, 4, -2\}$ ,  $\mathbf{c} = \{1, 3, -1\}$  и определить объем параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях.
3. Найти углы между векторами  $\mathbf{a} = \{5, 4, 5\}$  и  $\mathbf{b} = \{-3, 5, 2\}$ .
4. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  вдоль окружности, полученной пересечением сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  с плоскостью  $x + y + z = 1$ . Обход контура осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из точки  $M(1, 1, 0)$ .
5. Вычислить ротор векторного поля  $\mathbf{a} = \frac{y}{x^2}\mathbf{j} - \frac{1}{x}\mathbf{k}$  в точке  $M_0(1, -1, 1)$ .
6. Разложить векторное поле  $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (z^2 - x^2)\mathbf{j} + (yx - z^2)\mathbf{k}$  на потенциальное и соленоидальное векторные поля, восстановить скалярный и векторный потенциалы этих полей.
7. Найти потенциал центрального поля  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \sin^2 |\mathbf{r}|$ .
8. Разложить векторное поле  $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (z^2 - x^2)\mathbf{j} + (yx - z^2)\mathbf{k}$  по векторам основного базиса сферической системы координат.
9. Записать дивергенцию поля  $\mathbf{a} = (yx - z^2)\mathbf{i} + (z^2 - y^2)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$  в цилиндрической системе координат.
10. Найти ротор векторного поля  $\mathbf{a} = (r - \cos \theta)\mathbf{e}_r - \sin^2 \varphi \mathbf{e}_\theta + r^2 \mathbf{e}_\varphi$ .

### Примерные вопросы устного опроса

1. Вектор и его числовые характеристики.
2. Координаты вектора.
3. Линейные операции над векторами и их свойства.
4. Свойства линейных операций над векторами.
5. Равенство векторов, нулевой вектор, углы между векторами.
6. Коллинеарные и ортогональные векторы.
7. Линейная комбинация векторов.
8. Линейно зависимые и независимые векторы.
9. Базис в пространстве и на плоскости.
10. Разложение вектора по базису.
11. Ортонормированный базис, аффинный базис. Преобразование координат при переходе от одного базиса к другому.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.
15. Двойное векторное произведение трех векторов и формула его вычисления.
16. Понятие векторной функции от скалярного и векторного аргумента.
17. Годограф радиус-вектора точки.

18. Скалярные поля, линии и поверхности уровня скалярного поля.
19. Производная по направлению для скалярного поля.
20. Градиент скалярного поля. Теоремы о градиенте.
21. Связь градиента с производной по направлению.
22. Представление градиента через оператор Гамильтона.
23. Понятие векторного поля. Векторные линии и их уравнения.
24. Вычисление векторного поля по определению.
25. Различные формулы вычисления потока через поверхность.
26. Понятие дивергенции векторного поля и ее физический смысл.
27. Формула Остроградского – Гаусса, координатная форма дивергенции векторного поля в точке и ее физический смысл.
28. Представление дивергенции с помощью оператора Гамильтона.
29. Циркуляция векторного поля вдоль линии и замкнутого контура.
30. Физический (гидродинамический) смысл циркуляции. Примеры вычисления циркуляции.
31. Понятие ротора векторного поля через циркуляцию вдоль замкнутого контура

### **Примерные темы рефератов**

1. Координаты вектора и его числовые характеристики в координатной форме.
2. Операции над векторами и их свойства.
3. Линейная комбинация векторов, линейно зависимые и независимые векторы.
4. Базис и разложение вектора по базису.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Векторное произведение векторов.
7. Смешанное произведение трех векторов.
8. Двойное векторное произведение трех векторов.
9. Годограф радиус-вектора точки. Приращение радиус-вектора при изменении скалярного аргумента. Примеры.
10. Производная по направлению для скалярного поля.
11. Градиент скалярного поля.
12. Векторное поле. Векторные линии и их уравнения.
13. Поток векторного поля через поверхность. Вычисление потока вектора.
14. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского – Гаусса.

### **Примерные вопросы к экзамену**

1. Скалярные и векторные физические величины. Вектор и его числовые характеристики. Примеры.
2. Координаты вектора и его числовые характеристики в координатной форме. Примеры.
3. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число) и их свойства. Примеры.
4. Множество свободных векторов, равенство векторов, нулевой вектор, углы между векторами, коллинеарные и ортогональные векторы. Примеры.
5. Линейная комбинация векторов, линейно зависимые и независимые векторы. Примеры.
6. Базис в пространстве и на плоскости, разложение вектора по базису. Ортонормированный базис, аффинный базис. Преобразование координат при переходе от одного базиса к другому. Примеры.
7. Скалярное и векторное произведения векторов и их свойства. Примеры.
8. Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Двойное векторное произведение трех векторов и формула его вычисления. Примеры.

9. Понятие векторной функции от скалярного и векторного аргумента. Годограф радиус-вектора точки. Приращение радиус-вектора при изменении скалярного аргумента. Примеры.
10. Скалярные поля, линии и поверхности уровня скалярного поля. Примеры.
11. Производная по направлению для скалярного поля. Определение и формула для вычисления. Примеры.
12. Градиент скалярного поля. Теоремы о градиенте. Связь градиента с производной по направлению. Примеры.
13. Представление градиента через символический оператор Гамильтона. Свойства оператора «набла». Примеры.
14. Понятие векторного поля, примеры векторных полей. Векторные линии и их уравнения. Примеры.
15. Поток векторного поля через поверхность, вычисление векторного поля по определению. Инвариантная формулировка определения потока поля. Примеры.
16. Гидродинамическая интерпретация потока векторного поля через замкнутую поверхность. Физический смысл потока поля через поверхность. Примеры.
17. Различные формулы вычисления потока через поверхность. Примеры.
18. Понятие дивергенции векторного поля, как числовой характеристики поля и ее физический смысл. Источники и стоки поля. Инвариантная формулировка дивергенции векторного поля в точке. Примеры.
19. Формула Остроградского – Гаусса, координатная форма дивергенции векторного поля в точке и ее физический смысл. Представление дивергенции с помощью оператора Гамильтона. Примеры.
20. Циркуляция векторного поля вдоль линии и замкнутого контура. Физический (гидродинамический) смысл циркуляции. Примеры вычисления циркуляции.
21. Понятие ротора векторного поля через циркуляцию вдоль замкнутого контура, инвариантная формулировка ротора, определение ротора через поверхностную циркуляцию. Примеры.
22. Теорема Стокса, координатная формула ротора. Теорема о роторе. Обозначение ротора через определитель и с помощью оператора Гамильтона. Примеры.
23. Потенциальные векторные поля и их свойства. Примеры.
24. Консервативные векторные поля и их свойства. Примеры.
25. Центральные векторные поля и их свойства. Примеры.
26. Соленоидальные векторные поля и их свойства, трубчатые поля. Лапласовы поля. Примеры.
27. Векторный потенциал векторного поля. Теорема Гельмгольца. Примеры.
28. Повторные операции векторного поля и их свойства. Примеры.
29. Криволинейные системы координат, преобразование координат при переходе от одной системы координат к другой. Примеры.
30. Основной и взаимный реперы, порожденные криволинейной системой координат. Разложение вектора по основному и взаимному реперам. Примеры.
31. Цилиндрическая система координат, координатные поверхности и координатные линии, основной и взаимный базисы. Примеры.
32. Сферическая система координат, координатные поверхности и координатные линии, основной и взаимный базисы. Примеры.
33. Векторные поля в криволинейной системе координат, разложение вектора поля по основному и взаимному базисам. Примеры.
34. Разложение векторного поля по цилиндрической системе координат. Коэффициенты Ламе. Примеры.
35. Разложение векторного поля по сферической системе координат, коэффициенты Ламе. Примеры.

36. Полный дифференциал и градиент скалярного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
37. Дивергенция векторного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
38. Ротор векторного поля в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
39. Оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат. Примеры.
40. Преобразование координат при переходе от одной системы координат к другой. Разложение вектора по основному и взаимному базисам. Примеры.
41. Аналитическое определение вектора в криволинейной системе координат, ковариантные и контравариантные компоненты вектора и формулы их преобразования. Примеры.
42. Определение тензора второго ранга, формулы преобразования контравариантных, ковариантных и смешанных компонент тензора. Примеры.
43. Запись тензоров любой валентности и любого порядка, преобразования компонент произвольного тензора. Примеры.
44. Метрический тензор второго ранга, выражение геометрических характеристик через компоненты метрического тензора. Поднятие и опускание индексов тензоров с помощью компонент метрического тензора. Примеры.
45. Тензор Леви – Чивиты, его свойства и применение. Примеры.

#### **5.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Основными формами текущего контроля являются проверка домашних заданий, устные опросы группы во время практических занятий, контрольная работа, проверка рефератов и экзамен.

##### **Требования к выполнению практических работ**

Проверка домашних заданий регулярно осуществляется преподавателем на занятиях. Также на занятиях проводятся текущие устные опросы студентов. Теоретический материал лекционного курса должен быть проработан студентами к каждому практическому занятию. Некоторые вопросы теоретического курса могут быть проработаны ими самостоятельно с использованием литературы и выполнены в виде рефератов.

##### **Требования к выполнению самостоятельных работ**

Аудиторные занятия предполагают самостоятельную работу студентов по данному курсу. На лекциях предлагается для самостоятельного изучения дополнительные темы, самостоятельное проведение некоторых вычислений. На практических занятиях даются домашние задания для самостоятельного решения задач и упражнений.

##### **Требования к экзамену**

Процедура оценивания знаний и умений для получения экзамена состоит из следующих составных элементов. Учет посещаемости лекционных и практических занятий осуществляется по ведомости, представленной ниже в форме таблицы:

Таблица 1

| №<br>п/п | Фамилия<br>И.О. | Посещение занятий |   |   |   |  |  |       |   | Итого<br>% |
|----------|-----------------|-------------------|---|---|---|--|--|-------|---|------------|
|          |                 | 1                 | 2 | 3 | 4 |  |  | ..... | 9 |            |
| 1.       |                 |                   |   |   |   |  |  |       |   |            |

|    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 2. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 2

| №<br>п/п | Фами-<br>лия И.О. | Сумма баллов, набранных в семестре |                     |                  |                            |                                   |                 | Отметка об<br>экзамене | Подпись<br>препода-<br>вателя |
|----------|-------------------|------------------------------------|---------------------|------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------|------------------------|-------------------------------|
|          |                   | Посе-<br>щение                     | Кон-<br>спект       | Устные<br>опросы | Домаш-<br>ние за-<br>дания | Кон-<br>троль-<br>ная ра-<br>бота | Реферат         |                        |                               |
|          |                   | до 5<br>баллов                     | до 5<br>бал-<br>лов | до 5 бал-<br>лов | до 15<br>баллов            | до 20<br>баллов                   | до 20<br>баллов | до 30 баллов           |                               |
| 1        | 2                 | 3                                  | 4                   | 5                | 6                          | 7                                 | 8               | 9                      | 10                            |
| 1.       |                   |                                    |                     |                  |                            |                                   |                 |                        |                               |
| 2.       |                   |                                    |                     |                  |                            |                                   |                 |                        |                               |

### Структура оценивания посещения занятий

| Критерии оценивания                    | Баллы |
|----------------------------------------|-------|
| Студент посетил 0 – 10% всех занятий   | 0     |
| Студент посетил 11 – 20% всех занятий  | 1     |
| Студент посетил 21 – 40% всех занятий  | 2     |
| Студент посетил 41 – 60% всех занятий  | 3     |
| Студент посетил 61 – 80% всех занятий  | 4     |
| Студент посетил 81 – 100% всех занятий | 5     |

### Структура оценивания конспекта лекций

| Критерии оценивания                   | Баллы |
|---------------------------------------|-------|
| Студент написал 0 – 10% всех лекций   | 0     |
| Студент написал 11 – 20% всех лекций  | 1     |
| Студент написал 21 – 40% всех лекций  | 2     |
| Студент написал 41 – 60% всех лекций  | 3     |
| Студент написал 61 – 80% всех лекций  | 4     |
| Студент написал 81 – 100% всех лекций | 5     |

### Структура оценивания устных опросов

| Критерии оценивания                                           | Баллы |
|---------------------------------------------------------------|-------|
| Студент правильно ответил на 0 – 10% всех заданных вопросов   | 0     |
| Студент правильно ответил на 11 – 20% всех заданных вопросов  | 1     |
| Студент правильно ответил на 21 – 40% всех заданных вопросов  | 2     |
| Студент правильно ответил на 41 – 60% всех заданных вопросов  | 3     |
| Студент правильно ответил на 61 – 80% всех заданных вопросов  | 4     |
| Студент правильно ответил на 81 – 100% всех заданных вопросов | 5     |

### Структура оценивания домашних заданий

| Критерии оценивания                                        | Баллы   |
|------------------------------------------------------------|---------|
| Студент правильно выполнил 0 – 25% всех домашних заданий   | 0 – 3   |
| Студент правильно выполнил 26 – 50% всех домашних заданий  | 4 – 7   |
| Студент правильно выполнил 51 – 75% всех домашних заданий  | 8 – 11  |
| Студент правильно выполнил 76 – 100% всех домашних заданий | 12 – 15 |

### Структура оценивания контрольной работы

Контрольная работа содержит 4 задания. Баллы за каждое задание:

| Критерии оценивания                                                                                | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Студент решил задачу и показал полное и уверенное знание темы задания                              | 5     |
| Студент решил задачу, однако в решении имеются несущественные ошибки, недостатки и недочеты        | 4     |
| Студент в целом решил задачу, но в решении имеются заметные и грубые ошибки, недостатки и недочёты | 3     |
| Студент не решил задачу, но имеются более двух правильных идей или подходов к решению задачи       | 2     |
| Студент не решил задачу, но имеются только одна-две идеи или подходы к решению задачи              | 1     |
| Студент не решил задачу и показал полное незнание темы задания                                     | 0     |

### Структура оценивания реферата

| Уровни оценивания   | Критерии оценивания                                                                                                                                                                                                      | Баллы   |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Отлично             | содержание работы соответствует теме работы, работа выполнена самостоятельно, имеет творческий характер, отличается определенной новизной, проблема раскрыта глубоко и всесторонне, материал изложен логично             | 17 – 20 |
| Хорошо              | содержание работы соответствует теме работы, работа выполнена самостоятельно, имеет реферативный характер                                                                                                                | 13 – 16 |
| Удовлетворительно   | имеет место определенное несоответствие содержания работы заявленной теме, исследуемая проблема в основном раскрыта, но не отличается теоретической глубиной и аргументированностью, нарушена логика изложения материала | 9 – 12  |
| Неудовлетворительно | содержание работы не соответствует теме, работа содержит существенные ошибки                                                                                                                                             | 0 – 8   |

### Структура оценивания экзамена

| Уровни оценивания | Критерии оценивания                                                                                                                                                                | Баллы |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Отлично           | имеет место полное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать все теоремы из лекционного курса и решает все задачи и примеры из приведенных заданий | 21–30 |
| Хорошо            | имеет место основное усвоение теоретического и практического материала; студент умеет доказать                                                                                     | 11–20 |

|                     |                                                                                                                                                                                            |      |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                     | основные теоремы из лекционного курса и решает основные задачи и примеры из приведенных заданий                                                                                            |      |
| Удовлетворительно   | имеет место знание без доказательства основных теорем и формул курса; студент умеет решать задачи и примеры из приведенных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики | 6–10 |
| Неудовлетворительно | имеет место неусвоение основных теорем и формул курса; студент не умеет решать задачи и примеры из заданных заданий, являющиеся обобщением задач школьного курса математики                | 0–5  |

### Распределение баллов для экзамена

| Оценка по 5-балльной системе | Оценка по 100-балльной системе |
|------------------------------|--------------------------------|
| отлично                      | 81 – 100                       |
| хорошо                       | 61 - 80                        |
| удовлетворительно            | 41 - 60                        |
| неудовлетворительно          | 40-21                          |
| Не аттестован                | 20-0                           |

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Основная литература

1. Акивис М.А. Тензорное исчисление [Электронный ресурс]: Учебное пособие/Акивис М.А., Гольдберг В.В., 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 304 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=110700>.
2. Щетинин А.Н. Введение в тензорный анализ [Электронный ресурс] : Учеб. пособие / А.Н. Щетинин, Е.А. Губарева. - М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. - [http://www.studentlibrary.ru/book/bauman\\_0021.html](http://www.studentlibrary.ru/book/bauman_0021.html).

### 6.2. Дополнительная литература

1. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов [Текст] / И. Н. Векуа. - М. : Наука, 1978. – 296с.
2. Сокольников С.И. Тензорный анализ: теория и применение в механике сплошных сред. М.: КомКнига, 2007. – 376 с.
3. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. – 238 с.
4. Агеносов Л.Г., Няшин А.Ф. Векторный анализ (методические указания для студентов физического факультета). Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2003. – 48 с.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2000. – 448 с.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: ЛКИ, 2010. – 664 с.

7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1973. – 492 с.
8. Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. М.: Либроком, 2010. – 440 с.

### **6.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ: <http://lib.mexmat.ru/>
2. Математическое бюро: Учебники по математическому анализу: <http://www.matburo.ru>
3. <http://www.library.mephi.ru/>
4. <http://ega-math.narod.ru/>
5. <http://neo-chaos.narod.ru/fikhtengolts.html>

## **7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Грань Т.Н., Холина С.А. Методические рекомендации по проведению лекционных занятий.
2. Грань Т.Н., Холина С.А. Методические рекомендации по проведению лабораторных и практических занятий.

## **8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

### **Лицензионное программное обеспечение:**

Microsoft Windows  
Microsoft Office  
Kaspersky Endpoint Security

### **Информационные справочные системы:**

Система ГАРАНТ  
Система «КонсультантПлюс»

### **Профессиональные базы данных**

fgosvo.ru  
pravo.gov.ru  
www.edu.ru

## **9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций,

текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованные учебной мебелью, доской, демонстрационным оборудованием.

- помещения для самостоятельной работы, укомплектованные учебной мебелью, персональными компьютерами с подключением к сети Интернет и обеспечением доступа к электронным библиотекам и в электронную информационно-образовательную среду МГОУ;

- помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования, укомплектованные мебелью (шкафы/стеллажи), наборами демонстрационного оборудования и учебно-наглядными пособиями;

- лаборатория, оснащенная лабораторным оборудованием: комплект учебной мебели, проектор, проекционная доска, персональные компьютеры с подключением к сети Интернет и обеспечением доступа к электронным библиотекам и в электронную информационно-образовательную среду МГОУ.