МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Физико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
Протокол от «14» 02 2024 г., № 6
Зав. кафедрой ____________ /Кондратьева Г.В./

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине (модулю)

Алгебра

Направление подготовки (специальности) 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль (программа подготовки, специализация) Математика и информатика

Мытищи
2024

Содержание

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы[1]

[1] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
УК – 1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа
ПК – 1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания[2]

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этапы формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
УК-1	Пороговый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать основы системного подхода и основные приемы разрешения проблемных ситуаций Уметь осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	Практические задания, вопросы для разбора (опрос), доклады	Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания опроса Шкала оценивания доклада
	Продвинутый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать основы системного подхода и основные приемы разрешения проблемных ситуаций Уметь осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий Владеть методами критического анализа проблемных ситуаций на основе системного подхода,	Практические задания, вопросы для разбора (опрос), доклады	Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания опроса

[2] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

			способами разработки стратегии действий		Шкала оценивания доклада
ПК-1	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	*Знать:* содержание профессиональных задач, знать как осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач *Уметь:*пользоваться языком математики; вести информационно-аналитическую и информационно-библиографическую работу с привлечением современных технологий, логично и грамотно формулировать и высказывать свои мысли, аргументировать свою точку зрения	Практические задания, вопросы для разбора, (опрос), доклады	Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания опроса Шкала оценивания доклада
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	*Знать:* содержание профессиональных задач, знать как осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач *Уметь:* пользоваться языком математики; вести информационно-аналитическую и информационно-библиографическую работу с привлечением современных технологий, логично и грамотно формулировать и высказывать свои мысли, аргументировать свою точку зрения, адаптировать результаты изучения понятий и фактов алгебры	Практические задания, вопросы для разбора, (опрос), доклады	Шкала оценивания практического задания Шкала оценивания опроса Шкала оценивания доклада

			и теории чисел к школьному образовательному процессу *Владеть:* научным стилем изложения содержания, навыками поиска, сбора, систематизации и использования информации, методами и приемами устного и письменного изложения предметного материала		

Шкала оценивания доклада

	Критерии
4 балла	Реферат по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы, презентация адекватно отражает содержание реферата
3 балла	реферат по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы, но нет презентации
2 балла	реферат по теме удовлетворяет требованиям на оценку в 3 баллов, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация
1 балл	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
0 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

Шкала оценивания практического задания

Показатель	Баллы
Выполнено до 40% заданий	1-3
Выполнено 41-60% заданий	4-5
Выполнено 61-80% заданий	6-7
Выполнено более 81% заданий	8-10

Шкала оценивания устного опроса

Критерий оценивания	Баллы
Материал изложен последовательно и грамотно, сделаны необходимые обобщения и выводы	5
Материал изложен последовательно и грамотно, сделаны необходимые обобщения и выводы, но допущены несущественные неточности, исправленные самим студентом.	4
Материал изложен неполно, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, при этом студент делает необходимые обобщения и выводы	3
Не раскрыто основное содержание учебного материала, студент демонстрирует незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допускает ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые им не исправляются после нескольких замечаний преподавателя	2

УК – 1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Знать основы системного подхода и основные приемы разрешения проблемных ситуаций.
Уметь осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий.
Владеть методами критического анализа проблемных ситуаций на основе системного подхода, способами разработки стратегиидействий.

3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы

формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Задания, необходимые для оценивания сформированности УК – 1 на пороговом уровне[3]

1. Для каких матриц допустимы операции $A+B,\ A-B,\ A+C,\ A-C,\ B+C,\ B-C,$ где $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -8\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}.$

Найти допустимые суммы и разности этих матриц.

2. Для каких матриц допустимы операции $F\times B,\ F\times C,\ B\times C,$ где $F=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix},$

$B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$ Найти допустимые произведения этих матриц.

3. Показать, что $\left(A\times B\right)^T=B^T\times A^T$ для $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$

4. Решить уравнение $A\times X=B,$ если $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}.$

Варианты ответов: 1). {–4; 2}. 2). {–5; 3}. 3). {–2; 0}. Сделать проверку.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ способом Саррюса (способ треугольников).

6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{vmatrix}$ способом Саррюса (способ треугольников).

7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$ способом Саррюса (способ треугольников).

---

[3] Указываются отдельно по уровням, в случае если формулировки ЗУВ различаются в зависимости от уровней сформированности компетенций.

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ методом разложения по элементам первой строки.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ методом разложения по элементам третьей строки.

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ методом разложения по элементам третьего столбца.

Аудиторные и домашние практические задания для текущего контроля

1. Найти коэффициент при x в разложении определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & x & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & x & 2 \\ 4 & -1 & 5 & x & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Найти коэффициент при x в разложении определителя $\begin{vmatrix} 2 & x & -1 & x & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & x & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & x & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

3. При помощи алгебраических дополнений найдите обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Выберите верный ответ. Варианты ответов 1) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Для данных матриц A и B найти обратные матрицы. Сделать проверку.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найти сумму $2A + A \times B + 3B,$ если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Какими методами можно найти решение квадратной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$? Варианты ответов: методом Крамера, методом Гаусса, матричным методом. Выберите верный ответ.

7. Какими методами можно найти решение прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$? Варианты ответов: методом Крамера, методом Гаусса, матричным методом. Выберите верный ответ.

8. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

10. В ортонормальном базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ даны векторы $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$ и $\vec{b} = (3,\ 2,\ 1)$. Они линейно зависимы или не зависимы?

11. В ортонормальном базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ даны векторы $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (3,\ 4,\ 5)$ и $\vec{c} = (3,\ 2,\ 1)$. Они линейно зависимы или не зависимы?

12. Верно ли, что $A \times B = B \times A,$ если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

13. Верно ли, что $A \times B = B \times A,$ если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

14. Матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ привести к треугольному виду.

15. Матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ привести к треугольному виду.

16. Дана однородная квадратная системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0. \end{cases}$

а) сформулируйте условие существования единственного решения данной системы.

б) назовите это решение без его поиска.

17. Для однородной квадратной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ сформулируйте условие существования не единственного решения.

18. Найдите какое-либо решение однородной прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

19. Найдите какое-либо решение однородной прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

20. Найдите фундаментальную систему решений однородной прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Задания, необходимые для оценивания сформированности УК – 1 на продвинутом уровне

1. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M}, * \rangle$, где M – множество векторов в 3^x – мерном векторном пространстве, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{M}\left[\vec{x} * \vec{y} = \vec{x} + \vec{y}\right]$. Выясните, данная алгебра является: $a)$ группой; $б)$ кольцом; $c)$ полем.
Варианты ответов: только группой; только кольцом; только полем; группой, кольцом и полем.

2. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M}, * \rangle$, где M – множество векторов в 3^x – мерном векторном пространстве, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{M}\left[\vec{x} * \vec{y} = [\vec{x}, \vec{y}]\right]$, где $[\vec{x}, \vec{y}]$ – векторное произведение двух векторов. Выясните, данная алгебра является: $a)$ моноидом; $б)$ полугруппой; $c)$ группой;
Варианты ответов: только моноидом; только полугруппой; только группой; ни моноидом, ни полугруппой, ни группой.

3. Существует ли нейтральный элемент алгебры: $A = \langle \mathrm{M}, * \rangle$, где M – множество векторов в 3^x – мерном векторном пространстве, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{M}\left[\vec{x} * \vec{y} = [\vec{x}, \vec{y}]\right]$, где $[\vec{x}, \vec{y}]$ – векторное произведение двух векторов.

4. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M}, * \rangle$, где M – множество квадратных трёхчленов $\mathrm{M} = \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0\right\}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Z}(a_2 \neq 0), \ \forall U(x), V(x) \in \mathrm{M}\left[U * V = U + V\right]$, где $U + V$ – сумма двух трёхчленов. Выясните, данная алгебра является: $a)$ группой; $б)$ кольцом; $c)$ полем.
Варианты ответов: только группой; только кольцом; только полем; группой, кольцом и полем; ни группой, ни кольцом и ни полем.

5. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M}, * \rangle$, где M – множество квадратных трёхчленов

$$\mathrm{M}=\left\{a_2x^2+a_1x+a_0\right\},\ a_0,\ a_1,\ a_2\in\mathbf{Q}\,(a_0\cdot a_1\cdot a_2\neq 0),$$

$$\forall A(x),\ B(x)\in\mathrm{M}\left[A*B=(a_2b_2)x^2+(a_1b_1)x+(a_0b_0)\right],\ A(x)=a_2x^2+a_1x+a_0,\ B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0.$$

Найдите нейтральный и обратный элементы данной алгебры.

6. Дана алгебра $A=\langle \mathrm{M},\ *\rangle$, где $\mathrm{M}-$множество квадратных трёхчленов

$$\mathrm{M}=\left\{a_2x^2+a_1x+a_0\right\},\ a_0,\ a_1,\ a_2\in\mathbf{Q}\,(a_0\cdot a_1\cdot a_2\neq 0),$$

$$\forall A(x),\ B(x)\in\mathrm{M}\left[A*B=(a_2b_2)x^2+(a_1b_1)x+(a_0b_0)\right],\ A(x)=a_2x^2+a_1x+a_0,\ B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0.$$

Выясните, данная алгебра является: $a)$ группой; $б)$ кольцом; $c)$ полем.

Варианты ответов: только группой; только кольцом; только полем; группой, кольцом и полем; ни группой, ни кольцом и ни полем.

7. Найдите $\mathrm{Re}\left[\dfrac{1+2i}{2-i}\right]$.

Варианты ответов: $a)\ -1$; $б)\ 0$; $c)\ 1$.

8. Найдите $\mathrm{Im}\left[\dfrac{1+2i}{2-i}\right]$.

Варианты ответов: $a)\ -i$; $б)\ 2i$; $c)\ i$.

9. Найдите сумму, произведение и частное комплексных чисел $z_1=\dfrac{1}{2-i},\ z_2=\dfrac{1+3z}{3+z}$ в алгебраической форме.

10. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $z_1=\left(0,\ \sqrt{2}\right),\ z_2=(0,\ -\sqrt{3}),\ z_3=(3,\ 4),$ заданных в координатной форме $z=(x,\ y),$ где $x=\mathrm{Re}\,z,\ y=\mathrm{Im}\,z.$

11. Найти модуль и аргумент комплексных чисел $z_1=(-3,\ 4),\ z_2=(-3,\ -4),\ z_3=(1,\ \sqrt{3}),$ заданных в координатной форме $z=(x,\ y),$ где $x=\mathrm{Re}\,z,\ y=\mathrm{Im}\,z.$

12. Найти $\overline{z_1+z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2},\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)},$ если $z_1=-3+4i,\ z_2=1+i\sqrt{3}.$

13. Найти z^{25}, если $z=1+i\sqrt{3}.$

14. Решить квадратное уравнение $z^2+2z+5=0$ над полем действительных чисел.

15. Решить квадратное уравнение $z^2+2z+5=0$ над полем комплексных чисел.

Аудиторные и домашние практические задания для текущего контроля

1. Является ли следующее правило $\forall x,\ y \in \mathbf{Q}\left[x * y = x \cdot y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

2. Является ли следующее правило $\forall x,\ y \in \mathbf{R}\,(x \neq 0)\left[x * y = x^{y}\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

3. Верно ли, что $A = \langle \mathbf{N},\ + \rangle$ есть алгебра с нейтральным элементом?

4. Верно ли, что $A = \langle \mathbf{Z},\ + \rangle$ есть алгебра с нейтральным элементом?

5. Определите нейтральные элементы алгебр $A_1 = \langle \mathbf{Z},\ + \rangle$ и $A_2 = \langle \mathbf{Q},\ \times \rangle$.

6. Является ли алгебра $A = \langle \mathbf{Z},\ + \rangle$ абелевой группой?

7. Является ли множество квадратных матриц полугруппой по сложению?

8. Является ли множество квадратных матриц полугруппой по умножению?

9. Является ли множество квадратных матриц моноидом по сложению?

10. Является ли множество квадратных матриц моноидом по умножению?

11. Является ли множество невырожденных квадратных матриц группой по сложению?

12. Является ли множество невырожденных квадратных матриц группой по умножению?

13. Доказать, что $A = \langle \mathbf{N},\ * \rangle -$ коммутативная и ассоциативная алгебра по операции взятия максимума двух натуральных чисел: $\forall x,\ y \in \mathbf{N}\left[x * y = \max(x,\ y)\right]$?

14. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M},\ * \rangle$, где $\mathrm{M} -$ множество векторов в $3^{x} -$мерном векторном пространстве, $\forall \vec{x},\ \vec{y} \in \mathrm{M}\left[\vec{x} * \vec{y} = \vec{x} + \vec{y}\right]$. Назовите нейтральный элемент.

15. Дана алгебра $A = \langle \mathrm{M},\ * \rangle$, где $\mathrm{M} -$ множество нуль-векторов в $3^{x} -$мерном векторном пространстве, $\forall \vec{x},\ \vec{y} \in \mathrm{M}\left[\vec{x} * \vec{y} = \vec{x} + \vec{y}\right]$. Назовите противоположный элемент для произвольного вектора $\vec{x}$.

ПК – 1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач

Знать: содержание профессиональных задач, знать как осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.
Уметь: пользоваться языком математики; вести информационно-аналитическую и информационно-библиографическую работу с привлечением современных технологий, логично и грамотно формулировать и высказывать свои мысли, аргументировать свою точку зрения, адаптировать результаты изучения понятий и фактов алгебры и теории чисел к школьному образовательному процессу.
Владеть: научным стилем изложения содержания, навыками поиска, сбора, систематизации и использования информации, методами и приемами устного и письменного изложения предметного материала.

Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК – 1 на пороговом уровне

Уметь осуществлять критическийанализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий
Владеть методами критическогоанализа проблемных ситуаций на основе системного подхода, способами разработки стратегии действий

1. Разделить многочлен $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ на многочлен $g(x) = x - 2$ разными способами: 1) «уголком», 2) методом неопределённых коэффициентов, 3) по схеме Горнера (если возможно). Сделать проверку.
2. При каких a и b многочлен $f(x) = x^4 - 7x^2 - ax + b$ имеет число 2 корнем кратности 2?
Варианты ответов: 1) (–1, 3); 2) (4, 20); 3) (3, 4).
3. При каких a и b многочлен $f(x) = x^6 - 2x^3 - 3x^2 - ax + b$ имеет числа ± 1 корнем кратности 2?
Варианты ответов: 1) (–4, 1); 2) (2, 5); 3) (–4, 3).
4. При помощи алгоритма Евклида найти НОД многочленов $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 12$ и $g(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$ и выразить его линейно через эти многочлены. Сделать проверку.
5. Выразить НОД многочленов $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 12$ и $g(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$ линейно через эти многочлены. Сделать проверку.
6. Можно ли сказать, что следующее правило $\forall x, y \in \mathbf{N}[x * y = x + y]$ является алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

7. Можно ли сказать, что следующее правило $\forall x, y \in \mathbf{N}[x * y = x \cdot y]$ является алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

8. Является ли следующее правило $\forall x,\ y \in \mathbf{Z}\left[x * y = x + y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

9. Является ли следующее правило $\forall x,\ y \in \mathbf{Z}\left[x * y = x \cdot y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

10. Является ли следующее правило $\forall x,\ y \in \mathbf{Q}\left[x * y = x + y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?
Варианты ответов 1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

Аудиторные и домашние практические задания для текущего контроля

1. Найти НОК многочленов $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8,\ g(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 12,$ зная их НОД (задание 1 из предыдущего пункта). Сделать проверку.
2. Представить многочлены

$$f(x) = \left(x^2 + x\right)\left(x^2 - 2x - 3\right)\left(x + 1\right),\quad g(x) = \left(x^3 - 27\right)\left(x^2 - 4x - 3\right)\left(x + 1\right)$$

в канонической форме над множеством действительных чисел и найти их НОД d(x) и НОК m(x).
3. Верно ли, что в кольце квадратных матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицы A и B являются делителями $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Является ли подкольцом кольца многочленов $n-$й степени с действительными коэффициентами множество многочленов $n-$й степени с целыми коэффициентами?
5. Является ли полем кольцо $\mathrm{K} = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle,$ где $\mathrm{M} = \left\{(x,\ y) : (x,\ y) \in \mathbf{R}^2\right\},$ операции $+, \times$ определены следующим образом:

$$\forall (x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2) \in \mathbf{R}^2 \left[(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), (x_1,\ y_1) \times (x_2,\ y_2) = (x_1 \cdot x_2,\ y_1 \cdot y_2)\right].$$

6. Пусть $\mathrm{A} = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle -$ алгебра, где $\mathrm{M} = \mathbf{Z} \vee \mathbf{Q} \vee \mathbf{R}.$ Доказать, что данная алгебра есть бесконечное числовое коммутативное кольцо, где $+,\ \times$ есть обычные сложение и умножение.
7. Пусть $\mathrm{K} = \langle \mathrm{M}, +, \times, \theta, e \rangle -$ кольцо, где $\theta, e -$ нейтральные элементы ноль и единица. С учётом того, что $a \times x \neq x \times a,$ решите уравнения $a \times x = b\ (a \neq \theta)$ и $x \cdot a = b\ (a \neq \theta).$

8. Пусть $\mathrm{M}-$множество функций $f: X \to \mathrm{K}_{\mathbf{R}}$, определённых на множестве $X \subseteq \mathbf{R}$ со значениями в кольце действительных чисел $\mathrm{K}_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{R}, +, \times \rangle$. Для любых функций $f, g \in \mathrm{M}$ операции $+, \times$ определены следующим образом:

$$1)\ \forall x \in X \left[(f+g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x) \right],\ 2)\ \forall x \in X \left[(f \cdot g)(x) \overset{def}{=} f(x) \cdot g(x) \right].$$

Можно ли сказать, что $\mathrm{M}-$кольцо функций?

9. Верно ли, что множество квадратных матриц порядка n относительно операций сложения и умножения матриц есть ассоциативное, но не коммутативное кольцо?

10. Пусть $\mathrm{M} = \left\{ z : z = x + y\sqrt{3},\ x,\ y \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{R}$. Верно ли, что $\mathrm{M}-$коммутативное числовое кольцо.

<u>Задания, необходимые для оценивания сформированности ПК – 1 на продвинутом уровне</u>

1. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle -$некоторое поле с нейтральными элементами θ (ноль) и e (единица). Докажите, что $\theta \neq e$.

2. Преобразуйте комплексное число из алгебраической формы в тригонометрическую и экспоненциальную формы.

3. Преобразуйте комплексное число из тригонометрической формы в алгебраическую форму.

4. Решите квадратное уравнение $z^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \left(1 - i\sqrt{3}\right) = 0$.

5. Решите квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$.

6. Пусть $\Pi = \langle \square, +, \times \rangle -$поле действительных чисел. Докажите дистрибутивность для $n\ (n > 2)$ слагаемых: $\forall x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ z \in \mathrm{M} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \cdot z = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k \cdot z \right) \right]$.

7. Пусть $\mathrm{M}-$множество векторов в трёхмерном пространстве $\mathbf{R}^3$, $+$ есть знак сумма двух векторов; $\times$ есть знак векторного произведение двух векторов в пространстве $\mathbf{R}^3$. Верно ли, что алгебра $\mathrm{A} = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ есть кольцо?

8. Пусть $G = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle -$некоторая группа, где $\mathrm{M}-$непустое множество элементов произвольной природа. Перечислите нейтральный элемент группы на примерах числовых и не числовых групп.

9. Пусть $\mathrm{K} = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle -$некоторое кольцо, где $\mathrm{M}-$непустое множество элементов произвольной природа. Перечислите нейтральный элемент на примерах числовых и не числовых колец.

10. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle -$некоторое поле, где $\mathrm{M}-$непустое множество элементов произвольной природа. Перечислите нейтральные элементы на примерах числовых и не числовых полей.

Аудиторные и домашние практические задания для текущего контроля

1. Покажите, что множества целых и чётных целых чисел с обычными операциями сложения и умножения являются изоморфными кольцами.

2. Пусть $G_1 = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$, $G_2 = \langle \mathrm{M}, +\rangle$ $\left(\mathrm{M} = \left\{ \frac{m}{2},\, m \in \mathbb{Z} \right\} \right)$ – группы целых и рациональных чисел. Покажите, что группа G_1 гоморфно группе G_2.

3. Пусть $\mathrm{M} = \{0\}$. Алгебра $\mathrm{K}_1 = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ является ли подкольцом кольца $\mathrm{K}_2 = \langle \mathbf{Z}, +, \times \rangle$ относительно операций $+, \times$?

4. Пусть $\mathrm{K}_1 = \langle \mathbb{Z}, +, \times \rangle$, $\mathrm{K}_2 = \langle \mathbb{Q}, +, \times \rangle$ – кольца целых и рациональных чисел соответственно. Покажите, что кольцо K_1 гоморфно кольцу K_2.

5. Пусть $\Pi_1 = \langle \mathbb{Q}, +, \times \rangle$, $\Pi_2 = \langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ – поле рациональных и поле действительных чисел соответственно. Покажите, что поле Π_1 гоморфно полю Π_2.

6. Даны два кольца $\mathrm{K}_2 = \langle \mathbf{Z}_2, +, \times \rangle$, $\mathrm{K} = \langle \mathbf{Z}, +, \times \rangle$, где $\mathbf{Z}_2$ – множество чётных целых чисел, $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел соответственно. Является ли K_2 подкольцом кольца K?

7. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ – некоторое поле с нейтральными элементами θ (ноль) и e (единица) Докажите, что $\theta = -\theta$.

8. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ – некоторое поле с нейтральными элементами θ (ноль) и e (единица) Докажите, что $\forall x \in \Pi [x = -(-x)]$.

9. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ – некоторое поле с нейтральными элементами θ (ноль) и e (единица) Докажите, что $\forall x,\ y \in \Pi [-(x+y) = -x - y]$.

10. Пусть $\Pi = \langle \mathrm{M}, +, \times \rangle$ – некоторое поле с нейтральными элементами θ (ноль) и e (единица) Докажите, что $\forall x \in \mathrm{M} [\theta \cdot x = \theta]$.

Промежуточная аттестация

Вопросы к экзаменам

1 курс, 1 семестр

1. Матрицы над полем. Операция сложения матриц. Свойства операции сложения.
2. Умножение матриц на действительное число. Свойства этой операции.
3. Умножение матриц. Свойства этой операции (ассоциативность, не коммутативность, нейтральный элемент). Обратные матрицы.
4. Транспонирование матриц, транспонирование произведения матриц.

5. Квадратные матрицы. Единичная матрица. Обратные и обратимые матрицы.
6. Определитель квадратной матрицы. Определитель 2,3 порядков. Определитель n-го порядка.
7. Алгебраические дополнения и миноры элемента определителя.
8. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
9. Свойства определителя. Необходимые и достаточные условия равенства нулю определителя. Определитель треугольного вида.
10. Вычисление обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.
11. Простейшие матричные уравнения, их решение.
12. Системы линейных уравнений (СЛУ). Решения СЛУ. Равносильные СЛУ.
13. Однородные и неоднородные СЛУ, свойства их решений.
14. Элементарные преобразования СЛУ. Равносильность СЛУ при элементарных преобразованиях.
15. Элементарные преобразования матриц.
16. Ступенчатые системы линейных уравнений. Приведение СЛУ к ступенчатому виду.
17. Матрицы, соответствующие СЛУ. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатые матрицы. Ранг матрицы. Ранг СЛУ.
18. Теорема о числе решений систем линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Общие и частные решения систем линейных уравнений.
19. Запись и решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме.
20. Правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.

1 курс, 2 семестр

Вопросы

1. Алгебраическая операция на множестве, примеры. Свойства бинарной алгебраической операции.
2. Группа. Примеры групп. Простейшие свойства группы.
3. Кольцо. Примеры колец. Простейшие свойства кольца.
4. Поле. Примеры полей. Его простейшие свойства.
5. Подгруппа. Необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторое подмножество группы являлось ее подгруппой.
6. Подкольцо. Необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторое подмножество кольца являлось его подкольцом.
7. Подполе. Необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторое подмножество поля являлось его подполем.
8. Кольцо целых чисел. Делимость в кольце целых чисел.
9. Деление с остатком в кольце целых чисел.
10. Наибольший общий делитель целых чисел. Алгоритм Евклида.
11. Линейное выражение НОД,
12. Наименьшее общее кратное целых чисел.
13. Простые и составные числа.
14. Разложение целого числа в произведение простых чисел.
15. Поле комплексных чисел как расширение поля действительных чисел.

16. Алгебраическая форма комплексных чисел, операции с ними.
17. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
18. Тригонометрическая форма комплексного числа.
19. Корни из комплексных чисел.
20. Корни ***n***-й степени из единицы.
21. Решение двучленных уравнений.

2 курс, 3 семестр

Вопросы

1. Построение кольца многочленов от одной переменной над полем действительных чисел.
2. Теория делимости в кольце многочленов от одной переменной над полем действительных чисел.
3. Теорема о делении с остатком.
4. Деление многочлена на двучлен *x-a* и корни многочлена.
5. Теорема Безу. Кратные корни.
6. Теорема о максимальном числе корней многочлена.
7. Наибольший общий делитель многочленов над полем. Алгоритм Евклида.
8. Наименьшее общее кратное многочленов.
9. Неприводимые и приводимые над полем действительных чисел многочлены, их свойства.
10. Разложение многочлена в произведение нормированных неприводимых множителей и его единственность.
11. Каноническая форма записи многочлена. Нахождение НОД и НОК многочленов.

---

12. Простое и составное расширение поля.
13. Алгебраические и трансцендентные элементы над полем.
14. Минимальный многочлен алгебраического над полем элемента.
15. Строение простого алгебраического расширения поля. Избавление от иррациональности.

2 курс, 4 семестр

Вопросы

1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем действительных чисел.
2. Делимость в кольце многочленов от одной переменной над полем действительных чисел.
3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов от одной переменной над полем действительных чисел.
4. Деление многочлена на двучлен *x-a* и корни многочлена.
5. Теорема Безу. Кратные корни. Наибольшее возможное число корней многочлена.
6. Наибольший общий делитель многочленов над полем. Алгоритм Евклида.
7. Линейное выражение наибольшего общего делителя многочленов над полем
8. Наименьшее общее кратное многочленов. Связь НОД и НОК.
9. Неприводимые и приводимые над полем действительных чисел многочлены, их свойства.
10. Разложение многочлена в произведение многочленов, неприводимых над данным полем
11. Каноническая форма записи многочленов. НОД и НОК в канонической форме.
12. Расширения полей. Строение простого расширения поля. Минимальный многочлен алгебраического над полем элемента.

13. Строение простого алгебраического расширения поля.
14. Многочлены от n переменных и действия над ними. Степень многочлена от n переменных.
15. Кольцо многочленов от n переменных над областью целостности. Лексикографическое упорядочение членов многочлена от n переменных. Высший член произведения двух многочленов.
16. Симметрические многочлены. Свойства высшего члена симметрического многочлена
17. Основная теорема о симметрических многочленах и следствие из нее.
18. Многочлены от одной переменной над полем комплексных чисел. Основная теорема алгебры.
19. Алгебраическая замкнутость полей. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
20. Разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых множителей
21. Решение уравнений третьей степени над полем комплексных чисел .
22. Решение уравнений четвертой степени над полем комплексных чисел
23. Корни многочлена над полем действительных чисел. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами.
24. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых множителей.
25. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
26. Необходимый признак рационального корня многочлена с целыми коэффициентами.
27. Критерий неприводимости многочленов над полем рациональных чисел (Эйзенштейна).
28. Понятие разрешимости уравнения в радикалах. Условия разрешимости уравнения третьей степени в квадратных радикалах.
29. Примеры геометрических задач, сводящихся к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах.

Здания для контроля знаний на семестровом экзамене

1 курс, 1 семестр

Задания

1. Вычислить $(A+B)\cdot C,$ где $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Вычислить произведение $A\cdot B$ и $B\cdot A,$ если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A,$ если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$

4. Найти A^T и B^T, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

5. Найти $A\cdot A^T$ и $B^T\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

6. Показать, что $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

6. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу. Сделать проверку.

7. Решить матричное уравнение $X\cdot A = B,$ если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

8. Решить матричное уравнение $A\cdot X = B,$ если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Сделать проверку.

9. Найти двумя разными способами коэффициент при x в разложении определителя $\Delta,$ где

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & x & 3\\ 3 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 3 & x & 2\\ 4 & -1 & 5 & x & 2\\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ $a)$ разложением по элементам первого столбца;

$б)$ разложением по элементам первой строки.

11. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}$ $a)$ разложением по элементам второго столбца;

$б)$ разложением по элементам второй строки.

12. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $a)$ разложением по элементам третьего столбца; $б)$ разложением по элементам третьей строки.

13. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

14. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

15. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

16. Методом Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

17. Методом Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

18. Методом Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

19. Методом Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

20. Методом Крамера решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

21. Методом исключения неизвестных решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

22. Методом исключения неизвестных решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

23. Методом исключения неизвестных решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

24. Методом исключения неизвестных решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

25. Методом исключения неизвестных решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

26. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

и сделать проверку.

27. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

и сделать проверку.

28. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2 \end{cases}$$

и сделать проверку.

29. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 9, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

и сделать проверку.

30. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases}$$

и сделать проверку.

31. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 140, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 100 \end{cases}$$

и сделать проверку.

32. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 90, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 70 \end{cases}$$

и сделать проверку.

33. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

34. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

35. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

36. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы

линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

37. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

38. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

39. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

40. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

1 курс, 2 семестр

Задания

1. Является ли правило $\forall x,\ y \in \mathbf{Z}\left[x * y = x^y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает? Является ли группой данное множество с данной операцией?

2. Вычислить $\dfrac{(1+2i)^2-(3-2i)^2}{2-i}+\dfrac{1}{(5-i)^2}$.

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - z + 5 = 0$ в поле **R**, в поле **C**. Сделать проверку.

4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, вычислить $z = \sqrt{1+i\sqrt{3}}$. Ответ дать в алгебраической форме.

5. Решить уравнение $z^4 = -81$ в поле комплексных чисел. Для двух значений сделать проверку.

6. Является ли правило $\forall x,\ y \in \square\left[x * y = x^y\right]$ алгебраической операцией? Если да, то какими из свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтральных, симметрических элементов) эта операция обладает?

Варианты ответов:

1) ассоциативность; 2); коммутативность; 3); наличие нейтрального элемента; 4) наличие симметрических элементов; 5) операция не является алгебраической.

7. Решить квадратное уравнение $2z^2 - z + 5 = 0$ в поле **R**, в поле **C**. Сделать проверку.

8. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, вычислить $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-2-2i}\right)^{12}$. Ответ дать в алгебраической форме.

9**.** Уравнение $z^4 = 225$ решить в поле комплексных чисел. Для двух значений сделать проверку.

10. Докажите, что числа z_1, z_2 являются корнями уравнения $z^2 + pz + q = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} z_1 + z_2 = -p, \\ z_1 + z_2 = \sqrt{D} \end{cases} \vee \begin{cases} z_1 + z_2 = -p, \\ z_1 + z_2 = -\sqrt{D}. \end{cases}$

2 курс, 3 семестр

Задания

1. Методом Кардано решите уравнение $x^3 - 15x^2 + 72x - 108 = 0$ в поле комплексных чисел.
2. Методом Кардано решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 3x + 148 = 0$ в поле комплексных чисел.
3. Методом Феррари решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 20x + 25 = 0$ в поле комплексных чисел.
4. Методом Феррари решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5 = 0$ в поле комплексных чисел.
5. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 12x^4 + 32x^3 + 23x^2 + 15x + 18$.
6. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.
7. При помощи критерия Эйзенштейна докажите неприводимость многочлена $f(x) = x^5 - 8x^4 + 14x^3 - 28x^2 - 2x - 26$ над полем рациональных чисел **Q**.
8. При помощи критерия Эйзенштейна докажите неприводимость многочлена $f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$ над полем рациональных чисел **Q**.
9. Найти многочлен с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа: 1, -2, 1, $1-2i$, $3i$.
10. Найти многочлен с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа: -1, $-2+3i$, $1+i$.
11. Разложить многочлен $f(x) = 20x^5 + 22x^4 - 102x^3 + 41x^2 + 13x - 6$ в произведение неприводимых множителей над кольцом **Z** и над полями **Q, R, C.**
12. Разложить многочлен $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 17x^3 - 31x^2 + 4$ в произведение неприводимых множителей над кольцом **Z** и над полями **Q, R, C.**

13. Убедиться, что следующий многочлен – симметрический, и что он верно выражен через элементарные симметрические многочлены: $(x_1 + x_2)^2(x_2 + x_3)^2(x_3 + x_1)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2$.
14. Убедиться, что следующий многочлен – симметрический, и что он верно выражен через элементарные симметрические многочлены:

$x_1^3x_2^2 + x_1^3x_3^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^2x_3^3 + x_2^3x_3^2 + x_2^2x_3^3 = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3.$

15. Найти многочлен с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа: $1,\ 2-3i,\ 1+2i.$

2 курс, 4 семестр

Задания

1. Исследуйте векторы $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \vec{b}=(1,\ -2,\ 3)$ на линейную зависимость.
2. Исследуйте векторы $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \vec{b}=(1,\ -2,\ 3)$ и $\vec{c}=(3,\ 2,\ 1)$ на линейную зависимость.
3. С помощью векторов докажите, что максимальное число простых корней квадратного уравнения равно 2.
4. С помощью векторов докажите, что максимальное число простых корней кубичного уравнения равно 3.
5. Докажите, что векторы $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ и $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ линейно независимы тогда и только тогда, когда их векторное произведение не является тривиальным вектором.
6. Найдите координаты вектора $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)\in\mathbb{R}^3$ после его правого вращения вокруг координатной оси Ox на угол φ.
7. Найдите координаты вектора $\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)\in\mathbb{R}^3$ после его правого вращения вокруг координатной оси Oy на угол φ.
8. Найдите координаты вектора $\vec{c}=(3,\ 2,\ 1)\in\mathbb{R}^3$ после его правого вращения вокруг координатной оси Oz на угол φ.
9. Найдите вектор $\vec{x}$, такой, что $5\vec{x}+\vec{a}_1-2\vec{a}_2+3\vec{a}_3-4\vec{a}_4=\vec{0}$, где $\vec{a}_1=(-1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{a}_2=(-3,\ 2,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_3=(2,\ -2,\ 1,\ -1)$, $\vec{a}_4=(0,\ 2,\ -3,\ 1)$.
10. Найдите координаты вектора $\vec{x}=2\vec{a}_1+3\vec{a}_2-\vec{a}_3$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, если $\vec{a}_1=(-1,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_2=(-3,\ 2,\ 0)$, $\vec{a}_3=(2,\ -2,\ 1)$.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций[4]

Итоговая оценка знаний, умений, способов деятельности студентов по изучаемой дисциплине составляет 100 баллов

Максимальное количество баллов, которое можно набрать за текущий контроль – 70 баллов.

За ответы на вопросы устного опроса обучающийся может набрать максимально 30 баллов.

За выполнение докладов обучающийся может набрать максимально 20 баллов.

[4] Указывается информация в соответствии с утвержденной РПД

За выполнение практических заданий обучающийся может набрать максимально - 20 баллов.

Максимальная сумма баллов, которые обучающийся может набрать при сдаче экзамена, составляет 30 баллов.

Для сдачи экзамена необходимо выполнить все задания текущего контроля. Значимым моментом является показатель изучения материала лекций и выполнение заданий в указанные сроки. На экзамен выносится материал, излагаемый в лекциях и рассматриваемый на практических занятиях.

Шкала оценивания ответов студентов на экзамене

Количество баллов	Критерии оценивания
26-30	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач
15-25	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
8-14	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины

Итоговая оценка по дисциплине формируется из суммы баллов по результатам текущего контроля и промежуточной аттестации и выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей.

Оценка по 100-балльной системе	Оценка по традиционной системе
81 – 100	Отлично
61 - 80	Хорошо
41 - 60	Удовлетворительно
0 - 40	Не удовлетворительно