

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Наумова Наталия Александровна

Должность: Ректор

Дата подписания: 15.05.2025 18:03:14

Уникальный программный ключ:

6b5279da4e034bffa679172803da5b7b559fc69e2

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»

(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ)

Физико-математический факультет

Кафедра высшей алгебры, математического анализа и геометрии

Согласовано

деканом физико-математического факультета

«19» марта 2025 г.

/Кулешова Ю.Д./

Рабочая программа дисциплины

Логический анализ числовых систем

Направление подготовки

44.04.01 Педагогическое образование

Программа подготовки:

Современное математическое образование

Квалификация

Магистр

Форма обучения

Очная

Согласовано учебно-методической комиссией
физико-математического факультета

Протокол от «19» марта 2025 г. № 7

Председатель УМКом

/Кулешова Ю.Д./

Рекомендовано кафедрой высшей
алгебры, математического анализа и
геометрии

Протокол от «18» января 2025 г. № 5

Зав. кафедрой

/Кондратьева Г.В./

Москва

2025

Автор-составитель

кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной
математики и методики преподавания математики
Забелина Светлана Борисовна

Рабочая программа дисциплины «Логический анализ числовых систем» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, утверждённого приказом МИНОБРНАУКИ РОССИИ от 22.02.2018 г. № 126.

Дисциплина входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной для изучения.

Год начала подготовки (по учебному плану) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1. Планируемые результаты обучения.....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программ.....	4
3. Объем и содержание дисциплины.....	5
4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся....	6
5. Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации по дисциплине.....	8
6. Учебно-методическое и ресурсное обеспечение дисциплины.....	19
7. Методические указания по освоению дисциплины.....	19
8. Информационные технологии для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	22
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	22

1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

1.1. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины «Логический анализ числовых систем» является формирование фундаментальных знаний в области аксиоматического построения математической теории числовых систем.

Задачи дисциплины:

- сформировать систематизированные знания об основных числовых системах;
- сформировать осознанные представления о роли и месте линии числа в развитии математической науки;
- дать представление о системе кватернионов и показать завершенность всей теории числовых систем, как алгебр с делением.

1.2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции:

СПК-2. Способен к преподаванию учебных курсов, дисциплин (модулей) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

СПК-4. Способен к разработке учебно-методического обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной для изучения.

Для освоения дисциплины «Логический анализ числовых систем» используются знания, умения, способы деятельности и установки, сформированные в ходе изучения дисциплин: «Инновационная педагогическая деятельность в области математического образования», «Дополнительные разделы высшей математики».

Изучение учебной дисциплины «Логический анализ числовых систем» служит основой для освоения таких дисциплин, как «Математические методы обработки педагогических исследований», «Методика преподавания математики», «Актуальные вопросы теории и методики обучения математики».

3. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Объем дисциплины

Показатель объема дисциплины	Форма обучения
	Очная
Объем дисциплины в зачетных единицах	3
Объем дисциплины в часах	108
Контактная работа:	18,2
Лекции	4
Практические занятия	14
Контактные часы на промежуточную аттестацию:	0,2
Зачет	0,2

Самостоятельная работа	82
Контроль	7,8

Форма промежуточной аттестации: зачет во 2 семестре.

3.2.Содержание дисциплины

Наименование разделов (тем) Дисциплины с кратким содержанием	Кол-во часов	
	Лекции	Практические занятия
<i>Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел (система Пеано).</i> Основные следствия этой системы аксиом: алгебраические операции и основные свойства натуральных чисел, отношение порядка и свойства системы натуральных чисел как упорядоченной системы. Проблемы полноты, независимости и непротиворечивости системы аксиом.	1	2
<i>Тема 2. Аксиоматическая теория системы целых чисел</i> Аксиоматическая теория системы целых чисел, как алгебраического расширения системы натуральных. Основные следствия такого определения. Проблема независимости, непротиворечивости и полноты аксиоматического определения.	-	3
<i>Тема 3. Система рациональных чисел</i> Система рациональных чисел как простое алгебраическое расширение системы целых чисел. Основные следствия аксиоматического определения: представление дробями, деление на положительные и отрицательные числа, отношение порядка, основные свойства этого отношения, представление в позиционных системах счисления. Проблема корректности определения системы рациональных чисел.	1	4
<i>Тема 4. Система действительных чисел</i> Система действительных чисел, как непрерывно упорядоченное расширение системы рациональных чисел. Основные следствия такого определения: действительные числа как Дедекиндовы сечения упорядоченного множества рациональных чисел. Позиционное представление действительного числа.	1	2
<i>Тема 5. Система комплексных чисел</i> Система комплексных чисел как простое алгебраическое расширение системы действительных чисел. Представления комплексных чисел. Система комплексных чисел как Теория чисел ранга 2 с делением.	1	2
<i>Тема 6. Обобщение определения комплексных чисел</i> Обобщение определения комплексных чисел как алгебры с делением. Теорема Фробениуса. Алгебра с делением ранга 4 – система кватернионов.	-	1
Итого	4	14

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Темы для самостоятельного изучения	Изучаемые вопросы	Кол-во часов	Формы самостоятельной работы	Методическое обеспечение	Формы отчетности
Тема 1. Аксиоматические теории	1.Аксиоматический метод построения дедуктивных теорий 2.Отношения эквивалентности. Факторизация множества. 3. Отношения порядка.	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспект
Тема 2. Алгебры.	1.Алгебра как алгебраическая система. 2.Упорядоченные алгебры. 3.Изоморфные алгебры.	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспект
Тема 3. Общие принципы построения числовых систем.	1.Математические задачи, определившие переход от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел. 2.Математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел. 3.Математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел.	11	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Конспект
Тема 4. Теория натуральных чисел.	1.Непротиворечивость, полнота и независимость аксиом Пеано. 2.Операции сложения и умножения и их свойства. 3. Порядок на множестве натуральных чисел. 4. Свойство дискретности множества натуральных чисел. 5.Принцип наименьшего числа. 6. Категоричность теории Пеано. 7. Различные формы метода математической индукции.	11	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Реферат Доклад Расчетная работа

Тема 5. Теория целых чисел.	1. Симметризация множества натуральных чисел. 2. Теорема о строении множества целых чисел. 3. Теорема о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел. 4. Построение кольца Z с помощью теоремы о продолжении изоморфизма. 5. Строение упорядоченного кольца целых чисел. 6. Категоричность теории целых чисел	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Реферат Доклад
Тема 6. Теория рациональных чисел.	1. Строение множества рациональных чисел. 2. Поле классов дробей. 3. Построение поля Q с помощью теоремы о продолжении изоморфизма. 4. Строение упорядоченного поля рациональных чисел. 5. Теорема о категоричности теории рациональных чисел	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Реферат Доклад
Тема 7. Теория действительных чисел.	1. Задача заполнения числовой прямой. 2. Фундаментальные последовательности рациональных чисел. 3. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел. 4. Построение поля R с помощью теоремы о продолжении изоморфизма. 5. Теорема о категоричности теории действительных чисел.	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Реферат Доклад
Тема 8. Теория комплексных чисел.	1. Определение системы комплексных чисел. 2. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел. 3. Линейные алгебры с делением над полем действительных чисел. 4. Теорема Фробениуса. 5. Алгебра с делением ранга 4 – система кватернионов.	10	Работа с литературой.	Учебно-методическое обеспечение дисциплины	Реферат Доклад
ИТОГО:		82			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
СПК-2. Способен к преподаванию учебных курсов, дисциплин (модулей) по образовательным программам в образовательных организациях соответствующего уровня образования	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа
СПК-4. Способен к разработке учебно-методического обеспечения для реализации образовательных программ в образовательных организациях соответствующего уровня образования	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа

5.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оцениваемые компетенции	Уровень сформированности	Этап формирования	Описание показателей	Критерии оценивания	Шкала оценивания
СПК -4	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: общие цели и принципы построения основных числовых систем и их отражение при разработке учебно-методического обеспечения учебного курса математики в средней школе Уметь: разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных курсов, связанных с изучением числа	Конспект, доклад, реферат, расчетная работа	Шкала оценивания конспекта Шкала оценивания доклада Шкала оценивания реферата Шкала оценивания расчетной работы
	Продвинутый	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа	Знать: общие цели и принципы построения основных числовых систем и их отражение при разработке учебно-методического обеспечения учебного курса математики в средней школе, принцип расширения и его реализацию при построении конкретных числовых систем в образовательном процессе.	Конспект, доклад, реферат, расчетная работа	Шкала оценивания конспекта Шкала оценивания доклада Шкала оценивания реферата Шкала оценивания

			Уметь: выполнять построения упорядоченного полукольца натуральных чисел, упорядоченного кольца целых чисел, упорядоченного поля рациональных чисел, непрерывного поля действительных чисел, поля комплексных чисел, разрабатывать учебно-методическое обеспечение учебных курсов, связанных с изучением числа применять современные образовательные технологии для демонстрации идей расширения числовых множеств Владеть: навыками вычислительной культуры		расчетной работы
СПК-2	Пороговый	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать: основные особенности разработки учебных программ элективных курсов, связанных с числовыми системами Уметь: доказывать математические утверждения предметной области: выделять главные смысловые аспекты в доказательстве; строить простые математические модели, определять цель задачи, выбирать метод решения, проводить анализ решения, делать практические выводы и обобщения реализовывать исследовательские проекты в предметной области	Конспект, доклад, реферат, расчетная работа	Шкала оценивания конспекта Шкала оценивания доклада Шкала оценивания реферата Шкала оценивания расчетной работы
	Продвинутой	1.Работа на учебных занятиях 2.Самостоятельная работа	Знать: формы организации самостоятельной работы обучающихся основные особенности разработки учебных программ базовых и элективных курсов, связанных с числовыми системами Уметь: доказывать математические утверждения предметной области: распознавать и анализировать ошибки в рассуждениях Владеть: навыками организации и мониторинга самостоятельной работы обучающихся по программам бакалавриата, специалитета,	Конспект, доклад, реферат, расчетная работа	Шкала оценивания конспекта Шкала оценивания доклада Шкала оценивания реферата Шкала оценивания расчетной работы

			магистратуры и ДПП		
--	--	--	--------------------	--	--

Описание шкал оценивания

Шкала оценивания расчетной работы

Если студент правильно решил все задания и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 10 баллов.

Если студент правильно решил все задания, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 9-7 баллов (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил 60% - 80% всех заданий, но не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 6 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал полученные результаты, то ему выставляется 5 баллов.

Если студент правильно решил 50% всех заданий и обосновал не все полученные результаты, то ему выставляется 4-1 балл (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 1 балл.

Если студент правильно решил менее 50% всех заданий и не смог обосновать полученные результаты, то ему выставляется 0 баллов.

Шкала оценивания конспекта

Баллы	Критерии
2	Текст работы логически выстроен и математически грамотно изложен, ясен весь ход рассуждения. Имеются ответы на все поставленные вопросы, и они изложены научным языком, с применением терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства необходимых теорем и следствий из них
1	Текст работы логически выстроен, математически грамотно изложен. Имеются ответы не на все поставленные вопросы, они изложены с применением терминологии, принятой в изучаемой дисциплине. Представлены доказательства не всех необходимых теорем и следствий из них.
0	Текст работы не соответствует теме или отсутствуют адекватность передачи первоисточника и доказательность материала

Шкала оценивания реферата

Оценка	Критерии
8-10 баллов	реферат по теме написан самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
5-7 баллов	реферат удовлетворяет требованиям на оценку в 3 балла, но при этом допущены один-два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в реферате может быть недостаточно полно развернута
2-4 балла	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для

	дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
0-1 балл	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

Шкала оценивания доклада

Оценка	Критерии
5 баллов	доклад по теме составлен самостоятельно, продемонстрировано умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы
4 балла	доклад по теме удовлетворяет требованиям на оценку в 5 баллов, но при этом допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя, или допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя, или в докладе может быть недостаточно полно развернута аргументация
3 балл	неполно, непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала, или имелись затруднения, или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя, или студент не может применить теорию в новой ситуации
2 баллов	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые исправлены после нескольких замечаний преподавателя
1 балл	не раскрыто основное содержание учебного материала, обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала, допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя

5.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные темы для конспектов:

1. Аксиоматический метод построения дедуктивных теорий;
2. Отношения эквивалентности. Факторизация множества;
3. Отношения порядка;
4. Алгебра как алгебраическая система;
5. Упорядоченные алгебры;
6. Изоморфные алгебры;
7. Математические задачи, определившие переход от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел.

8. Математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел;
9. Математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел;
10. Непротиворечивость, полнота и независимость аксиом Пеано;
11. Операции сложения и умножения и их свойства;
12. Порядок на множестве натуральных чисел;
13. Свойство дискретности множества натуральных чисел.
14. Принцип наименьшего числа;
15. Категоричность теории Пеано;
16. Различные формы метода математической индукции;
17. Симметризация множества натуральных чисел;
18. Теорема о строении множества целых чисел;
19. Теорема о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел;
20. Построение кольца Z с помощью теоремы о продолжении изоморфизма;
21. Строение упорядоченного кольца целых чисел;
22. Категоричность теории целых чисел;
23. Строение множества рациональных чисел;
24. Поле классов дробей;
25. Построение поля Q с помощью теоремы о продолжении изоморфизма;
26. Строение упорядоченного поля рациональных чисел;
27. Теорема о категоричности теории рациональных чисел;

Примерные задания расчетной работы:

1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in \mathbb{N}$.
2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .
 $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, b = 6$.
3. Докажите методом математической индукции: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.
4. Найдите сумму
 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2018 \cdot 2018! + 2019 \cdot 2019!$
5. Доказать:
 - a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
 - b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$,
 - c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
 - d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$,
 - e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
 - f) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$,
6. Доказать:

- a) $2^n > 2n + 1 \quad (n \geq 3),$
- b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$
- c) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$
- d) $2!4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n, \quad n \geq 2,$
- e) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n > 1,$
- f) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$
- g) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

7. Вычислить радиусы r_n, R_n вписанной и описанной окружностей правильного $2n$ -угольника с периметром p .
8. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.

Примерные темы рефератов:

1. Общие принципы построения числовых систем.
2. Аксиоматическая теория натуральных чисел.
3. Принцип расширения числовой системы.
4. Построение кольца целых чисел.
5. Аксиоматическое построение системы целых чисел.
6. Определение системы рациональных чисел.
7. Построение поля рациональных чисел.
8. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
9. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.
10. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
11. Построение поля действительных чисел.
12. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.
13. Определение системы комплексных чисел.
14. Построение поля комплексных чисел.
15. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.
16. Теорема Фробениуса.

Примерные темы докладов:

1. Сложение натуральных чисел.
2. Умножение натуральных чисел.
3. Порядок на множестве натуральных чисел.
4. Различные формы метода математической индукции.
5. Категоричность теории Пеано.
6. Вычитание в произвольной алгебре.
7. Принцип расширения числовой системы.
8. Определение системы целых чисел.
9. Эквивалентные пары натуральных чисел.
10. Кольцо классов пар натуральных чисел.
11. Построение кольца целых чисел.
12. Порядок в кольце целых чисел.

13. Аксиоматическое построение системы целых чисел.
14. Деление в произвольной алгебре.
15. Определение системы рациональных чисел.
16. Эквивалентные дроби.
17. Поле классов дробей.
18. Построение поля рациональных чисел.
19. Строение упорядоченного поля рациональных чисел.
20. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел.
21. Задача заполнения числовой прямой.
22. Фундаментальные последовательности рациональных чисел.
23. Сходящиеся последовательности рациональных чисел
24. Построение поля классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
25. Порядок в поле классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
26. Построение поля действительных чисел.
27. Аксиоматическое построение поля действительных чисел.
28. Определение системы комплексных чисел.
29. Поле пар действительных чисел.
30. Построение поля комплексных чисел.
31. Аксиоматическое построение поля комплексных чисел.
32. Линейные алгебры с делением над полем действительных чисел.
33. Теорема Фробениуса. Кватернионы.

Примерные вопросы к зачету:

1. Опишите аксиоматический метод построения дедуктивных теорий, укажите характерные особенности полуформального аксиоматического метода. Опишите понятие модели полуформальной аксиоматической теории и приведите примеры теорий и их моделей.

2. Назовите практические источники возникновения понятия «число». Раскройте смысл понятия «числовая система». Укажите математические задачи, решение которых потребовало перехода от полукольца натуральных чисел к кольцу целых, а затем – к полю рациональных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел. Укажите математические задачи, решение которых потребовало построения поля комплексных чисел как расширения поля действительных чисел. Охарактеризуйте возможности дальнейшего расширения числовых систем.

3. Назовите первичные понятия полуформальной порядковой теории натуральных чисел. Сформулируйте аксиомы Пеано натурального ряда. Приведите символические записи аксиом 1–3 Пеано и их контрапозиционные варианты. Охарактеризуйте непротиворечивость и полноту теории Пеано. Для данного натурального числа определите следующее и предшествующее натуральное число. Докажите независимость каждой из аксиом Пеано от остальных.

4. Определите операцию сложения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность сложения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите ассоциативность и коммутативность сложения. Сформулируйте и докажите утверждения о сумме и слагаемом и о прибавлении одного числа к обеим частям равенства.

5. Определите операцию умножения натуральных чисел, на примере раскройте ее смысл. Сформулируйте и докажите существование и единственность умножения натуральных чисел. Сформулируйте и докажите правую дистрибутивность,

коммутативность и ассоциативность умножения. Сформулируйте и докажите утверждение об умножении на одно число обеих частей равенства. Опишите систему натуральных чисел как полукольцо.

6. Сформулируйте и докажите теорему о расположении натуральных чисел. Определите отношение «меньше» на множестве натуральных чисел. Докажите, что система натуральных чисел с отношением «меньше» есть упорядоченное полукольцо, опишите следствия этого факта. Докажите, что сумма натуральных чисел больше каждого слагаемого, а произведение не меньше каждого из множителей. Сформулируйте и докажите утверждение о первом элементе множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда. Определите дискретное и плотное множество, сформулируйте и докажите свойство дискретности множества натуральных чисел. Сформулируйте и докажите принцип наименьшего числа, раскройте его роль в аксиоматике натурального ряда. Приведите развернутую характеристику системы натуральных чисел как упорядоченного полукольца.

7. Определите категоричную теорию. Сформулируйте и докажите теорему об изоморфизме систем Пеано. Раскройте методологическую сущность категоричности системы натуральных чисел.

8. Определите разность элементов в произвольной алгебре со сложением. Определите операцию «вычитание». Докажите, что в любом кольце вычитание определено. Покажите, что если разность двух натуральных чисел существует, то она единственная. Покажите, что в полукольце натуральных чисел вычитание не определено.

9. Опишите ситуации, в которых возникает необходимость расширения числовой системы. Сформулируйте принцип расширения числовой системы. Объясните, смысл словосочетаний «наименьшее расширение» и «расширение однозначно с точностью до изоморфизма».

10. Обоснуйте необходимость расширения полукольца натуральных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею симметризации множества натуральных чисел. Определите систему целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о распадении множества целых чисел на непересекающиеся подмножества. Сформулируйте и докажите теорему о представлении целого числа в виде разности натуральных чисел.

11. Определите эквивалентность упорядоченных пар натуральных чисел, докажите, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Сформулируйте и докажите утверждение о прибавлении одного натурального к каждому элементу пары. Сформулируйте и докажите утверждение о парах с одинаковыми элементами. Сформулируйте и докажите утверждение о парах, первый элемент которых больше второго на 1. Сформулируйте и докажите утверждение о представителях эквивалентных пар; покажите единственность соответствующего представления. Сформулируйте и докажите утверждение о корректности действий для пар.

12. Определите классы эквивалентных пар натуральных чисел, сформулируйте их основные свойства. Определите операции сложения и умножения классов пар натуральных чисел, обоснуйте корректность этих определений. Докажите, что множество всех классов пар образует коммутативное кольцо с единицей относительно операций сложения и умножения классов.

13. Опишите всевозможные виды классов пар натуральных чисел. Выделите в построенном кольце подалгебру. Установите изоморфизм между полукольцом натуральных чисел и подалгеброй. Постройте кольцо Z с помощью теоремы о продолжении изоморфизма, опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное кольцо Z удовлетворяет критерию кольца целых чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество целых чисел. Опишите целые числа 0 и 1 и

покажите, что $0 \neq 1$. Докажите, что в кольце целых чисел нет делителей нуля; объясните смысл этого факта.

14. Определите отношения «меньше» на множестве целых чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между натуральными числами. Покажите, как соотносятся с нулем натуральные числа и числа, противоположные натуральным. Докажите, что кольцо целых чисел упорядочено отношением «меньше», укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда для кольца целых чисел; объясните его смысл. Докажите дискретность множества целых чисел. Покажите, что множество целых чисел не вполне упорядочено отношением «меньше». Приведите развернутую характеристику системы целых чисел как упорядоченного кольца.

15. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории целых чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории целых чисел; раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система целых чисел определяется как минимальное кольцо, являющееся расширением полукольца натуральных чисел. Раскройте связь конструктивно построенных колец и $\mathbb{Z}$ с аксиоматической теорией целых чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории целых чисел; объясните смысл этого факта.

16. Определите частное элементов в алгебре с умножением. Определите операцию «деление». Докажите, что в любом поле деление определено. Покажите, что если частное двух целых чисел существует, то оно единственное. Покажите, что в кольце целых чисел деление не определено.

17. Обоснуйте необходимость расширения кольца целых чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Опишите идею расширения множества целых чисел. Определите систему рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о строении множества рациональных чисел.

18. Опишите всевозможные виды классов дробей. Выделите в поле подалгебру $\mathbb{Z}$. Установите изоморфизм между кольцом целых чисел и алгеброй $\mathbb{Z}$. Постройте поле $\mathbb{Q}$ с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Покажите, что построенное поле удовлетворяет критерию поля рациональных чисел. Укажите основные классы, на которые разбивается множество рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о представлении рациональных чисел в виде несократимых дробей.

19. Определите отношения и «меньше» на множестве рациональных чисел; покажите, что они являются продолжениями соответствующих отношений между целыми числами. Докажите, что поле рациональных чисел упорядочено отношением «меньше», укажите основные следствия из этого факта. Сформулируйте и докажите принцип Архимеда для поля рациональных чисел; объясните его смысл. Докажите плотность множества рациональных чисел. Покажите, что множество рациональных чисел не вполне упорядочено отношением «меньше». Приведите развернутую характеристику системы рациональных чисел как упорядоченного поля.

20. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории рациональных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории рациональных чисел, раскройте их содержательный смысл. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система рациональных чисел определяется как минимальное поле, являющееся расширением кольца целых чисел. Раскройте связь конструктивно построенных полей с аксиоматической теорией рациональных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о категоричности теории рациональных чисел.

21. Опишите всевозможные виды ФП рациональных чисел. Выделите в упорядоченном поле $\mathbb{R}$ подалгебру $\mathbb{Q}$. Установите изоморфизм между упорядоченным полем рациональных чисел и подалгеброй $\mathbb{Q}$. Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Докажите

архимедовскую упорядоченность поля. Сформулируйте и докажите лемму о рациональных приближениях в поле. Докажите полноту поля. Обоснуйте вывод о том, что поле является полем действительных чисел.

22. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории действительных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории действительных чисел. Покажите, что с помощью данной аксиоматики система действительных чисел определяется как непрерывное упорядоченное поле. Обоснуйте категоричность теории действительных чисел.

23. Обоснуйте необходимость расширения поля действительных чисел и сформулируйте требования к этому расширению. Определите систему комплексных чисел. Сформулируйте и докажите теорему о стандартном виде комплексного числа.

24. Определите операции сложения и умножения пар действительных чисел. Докажите, что множество $\mathbb{C}$ пар действительных чисел образует поле относительно введенных операций сложения и умножения. Укажите нейтральные элементы по сложению и умножению в построенном поле, а также элементы, противоположные и обратные элементам данного поля.

25. Опишите всевозможные виды пар действительных чисел. Выделите в поле $\mathbb{C}$ подалгебру $\mathbb{R}$. Установите изоморфизм между полем действительных чисел и подалгеброй $\mathbb{R}$. Постройте поле с помощью теоремы о продолжении изоморфизма; опишите все этапы этого построения. Укажите "мнимую единицу" в поле. Покажите, что построенное поле $\mathbb{C}$ является полем комплексных чисел (удовлетворяет теореме о стандартном виде комплексного числа). Покажите, что поле комплексных чисел нельзя упорядочить.

26. Приведите первичные понятия полуформальной аксиоматической теории комплексных чисел. Приведите систему аксиом полуформальной теории комплексных чисел; опишите различные модели этой теории. Покажите категоричность теории комплексных чисел. Объясните, почему идея решения целых алгебраических уравнений не может служить основой для дальнейшего расширения числовых систем.

27. Определите линейную алгебру над произвольным полем. Определите линейную алгебру с делением над произвольным полем. Приведите примеры алгебр с делением над полем действительных чисел и укажите их размерность. Определите систему кватернионов как линейную алгебру с делением размерности 4 над полем действительных чисел.

28. Перечислите известные ассоциативные алгебры с делением над полем действительных чисел, укажите их размерность. Сформулируйте теорему Фробениуса. Раскройте смысл теоремы Фробениуса и ее роль в решении задачи последовательного расширения числовых систем.

5.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Формами текущего контроля являются устные опросы, выполнение расчетной работы, написание конспектов, реферата, заслушивание докладов. Для проведения промежуточной аттестации разработаны вопросы к зачету.

Общая оценка (100 баллов) складывается из оценки за текущий контроль (80 баллов), и оценки за зачет (20 баллов)

Шкала оценивания зачета

Количество баллов	Критерии оценивания
19-20	Если студент свободно ориентируется в теоретическом материале, знает формулировки основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач

7-18	Если студент недостаточно свободно ориентируется в теоретическом материале, ошибается при формулировании основных определений, теорем и свойств, умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
3-6	Если студент плохо ориентируется в теоретическом материале, не знает некоторые формулировки основных определений, теорем и свойств, у студента возникают проблемы при применении теоретических сведений для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).
0-2	Если студент не ориентируется в теоретическом материале, не знает большинство формулировок основных определений, теорем и свойств и не умеет применять теоретические сведения для решения типовых задач (в зависимости от количества и степени имеющихся ошибок и недочётов).

Итоговая шкала оценивания результатов освоения дисциплины

Итоговая оценка по дисциплине выставляется по приведенной ниже шкале. При выставлении итоговой оценки преподавателем учитывается работа обучающегося в течение освоения дисциплины, а также оценка по промежуточной аттестации.

Количество баллов	Оценка по традиционной шкале
81-100	Зачтено
61-80	Зачтено
41-60	Зачтено
0-40	Не зачтено

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Основная литература

1. Смолин, Ю. Н. Числовые системы : учеб. пособие / Смолин Ю. Н. - 3-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2021. - 112 с. - ISBN 978-5-9765-0794-4. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/flinta20122559.html> (дата обращения: 09.03.2023). - Режим доступа : по подписке.
2. Ларин, С. В. Числовые системы : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 149 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09500-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515447> (дата обращения: 09.03.2023).
3. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 160 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05567-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515448> (дата обращения: 09.03.2023).

6.2. Дополнительная литература

1. **Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры [Текст] : учебник для вузов / А. Г. Курош. - 19-е изд., стереотип. - СПб. : Лань, 2019. - 432с. – Текст: непосредственный.
2. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 23-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9033-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/183725> (дата обращения: 09.03.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Смолин, Ю. Н. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие / Ю. Н. Смолин - Москва : ФЛИНТА, 2017. - 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976500501.html> (дата обращения: 09.03.2023). - Режим доступа : по подписке.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]: Учеб. пособие для педагогических институтов. / Л.Я. Куликов — М.: Высш. школа, 1979. — 559 с. — Режим доступа: <http://bookre.org/reader?file=1221511&pg=3>
5. Нечаев В. И. Числовые системы: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / В.И. Нечаев — М.: Просвещение, 1975. — 199 с. — Режим доступа: <https://uch-lit.ru/matematika-2/dlya-studentov/nechaev-v-i-chislovyie-sistemyi-posobie-dlya-studentov-pedagogicheskikh-institutov-onlayn>
6. Федяев О.И. Числовые системы: учеб. пособие / О.И. Федяев — М.: МОПИ, 1991 — 68 с. – Текст: непосредственный.

6.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Российский образовательный портал – <http://www.school.edu.ru/>
2. Электронное научное издание (журнал) «Современные проблемы науки и образования». <http://www.science-education.ru>
3. Российская академия образования. Институт содержания и методов обучения. Центр оценки качества образования // <http://www.centeroko.ru/>
4. Рособрнадзор. Управление оценки качества общего образования. Материалы // http://obrnadzor.gov.ru/ru/about/structure/education_quality
5. <http://teacher.fio.ru> – Учитель. ру (Федерация Интернет-образования)
6. <http://www.mcko.ru> – Государственное автономное учреждение города Москвы «Московский центр качества образования»
7. <http://www.metodisty.ru> – профессиональное сообщество педагогов «Методисты»

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы магистрантов
2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Лицензионное программное обеспечение:

Microsoft Windows

Microsoft Office

Kaspersky Endpoint Security

Информационные справочные системы:

Система ГАРАНТ

Система «КонсультантПлюс»

Профессиональные базы данных

fgosvo.ru – Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования

pravo.gov.ru - Официальный интернет-портал правовой информации

www.edu.ru – Федеральный портал Российское образование

Свободно распространяемое программное обеспечение, в том числе отечественного производства

ОМС Плеер (для воспроизведения Электронных Учебных Модулей)

7-zip

Google Chrome

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает в себя:

- учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: учебной мебелью, доской, демонстрационным оборудованием, персональными компьютерами, проектором;
- помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде.