МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСТИТЕТ
(МГОУ)

Физико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

УТВЕРЖДЕН на заседании кафедры
Протокол от «31» 05 2020 г., № 11
Зав. Кафедрой / Рассудовская М.М./

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине
Теория вероятностей

Направление подготовки
44.03.01 – Педагогическое образование

Профиль
Математика

Мытищи
2020

Авторы-составители:

Рассудовская М.М., кандидат педагогических наук, профессор кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики МГОУ,
Кулешова Ю.Д., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики МГОУ

Рабочая программа дисциплины «Теория вероятностей» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиль «Математика», утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ РОССИИ от 22.02.2018 г. № 121.

Дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной для изучения.

Год начала подготовки 2020

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Изучение дисциплины «Теория вероятностей» позволяет сформировать у бакалавров следующие компетенции.

Код и наименование компетенции	Этапы формирования
ОПК – 8 – Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	1. Работа на учебных занятиях 2. Самостоятельная работа

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания (из РПД)

Ниже представлен материал, отражающий показатели и критерии оценивания сформированности компетенций на различных этапах изучения дисциплины. Задания для студентов представлены на двух уровнях: пороговом и продвинутом. Для оценки сформированности компетенций на данных уровнях применена 100 – балльная шкала.

Оценив аемые компет енции	**Уровень сформиро ванности**	**Этап формирован ия**	**Описание показателей**	**Критерии оценивания**	**Шкала оценива ния, баллы**
ОПК-8	Пороговый	1. Работа на учебных занятиях 2.Самостояте льная работа	Знает: основные законы теории вероятностей, теоретические основы педагогической деятельности. Умеет: осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний.	Опросы, проверка домашних заданий, тестировани е, контрольная работа	13-20
	Продвинут ый	1. Работа на учебных занятиях 2.Самостояте льная работа	Знает: основные законы теории вероятностей, теоретические основы педагогической деятельности. Умеет: осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний. Владение способностью осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний.	Опросы, проверка домашних заданий, тестировани е, контрольная работа	20-33

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Список вопросов к экзамену:

1.Случайные события. Соотношения между случайными событиями.
2.Классическое определение вероятности события.
3.Статистические закономерности. Статистическое определение вероятности события. Частота появления события.
4.Элементы комбинаторики и их применение к решению вероятностных задач.
5.Геометрические вероятности.
6.Теоремы сложения и умножения вероятностей.
7.Формула полной вероятности.
8.Формула Байеса.
9.Аксиометрическое построение теории вероятностей.
10.Вычисление вероятности появления события m раз при повторных независимых испытаниях. (Формула Бернулли; закон Пуассона; теорема Муавра-Лапласа с доказательствами).
11.Формула наивероятнейшего числа появления события при n независимых испытаниях.
12.Определениее случайной величины; виды случайных величин (примеры).
13.Ряд распределения случайной величины. Многоугольник распределения.
14.Функции распределения случайной величины.
15.Числовые характеристики случайной величины.
16.Закон распределения случайной величины («биноминальный», Паскаля, Пуассона, равномерный, нормальный).
17.Вероятность попадания случайной величины на заданный числовой промежуток.
18.Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания.
19.Интеггральная теорема Муавра-Лапласа (с доказательством).
20.Неравенство Чебышева.
21.Закон больших чисел (т. Чебышева, т. Бернулли) (с доказательствами).
22.Понятие о центральной предельной теореме.
23.Система случайных величин. Законы распределения системы случайных величин.
24.Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения случайных величин и их числовые характеристики.
25.Числовые характеристики системы случайных величин.
26.Корреляционный момент, коэффициент корреляции.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа №1

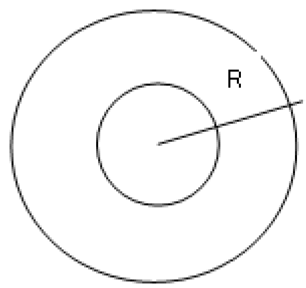
Содержание: классическое определение вероятности события; частота события; геометрические вероятности; алгебра событий; теоремы сложения и умножения; формула полной вероятности; формула Байеса.

Контрольная работа №2

Содержание: испытания Я. Бернулли; формула Бернулли; закон Пуассона; локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа; случайные величины; законы распределения случайных величин; числовые характеристики случайных величин; неравенство Чебышева; предельные теоремы теории вероятностей.

<u>Образец 1-го контрольного задания с решениями</u>

1. В собираемое устройство входят два однотипных блока. Блоки берут наугад из партии, содержащей 8 исправных и 2 бракованных блока. Найти вероятность того, что устройство окажется исправным, если для этого: а) оба блока должны быть исправными; б) хотя бы один блок должен быть исправным.



2.Точка брошена внутрь круга радиуса R. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга окажется меньше $\frac{R}{2}$.

3. Партия резисторов изготовлена двумя заводами, причем продукции первого завода в два раза больше, чем второго. Вероятность брака на первом заводе равна 0,04, а на втором – 0,06. Найти вероятность того, что случайным образом взятая деталь партии изготовлена первым заводом, если она оказалась бракованной.

Решение задач образца 1-го контрольного задания

1. Рассмотрим событие А – оба блока в устройстве должны быть исправны; событие В – хотя бы один блок в устройстве исправный.

Применим классическое определение вероятности. Число способов выбора двух блоков из 10 равно C_{10}^{2}, число способов выбора двух исправных блоков из 10 равно $C_8^2 \cdot C_2^0$.

Тогда $P(A) = \dfrac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \dfrac{28}{45}$;

$$P(B) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0 + C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{44}{45}.$$

2. Событие А – расстояние от центра круга до точки меньше $\frac{R}{2}$.

Это значит, что точка должна попасть в круг радиуса $\frac{R}{2}$

Тогда $P(A) = \dfrac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \dfrac{1}{4}$.

3. Введем следующие события:

Событие А – взятая из партии деталь оказалась бракованной.

Событие H_1 – деталь изготовлена на первом заводе.

Событие H_2 – деталь изготовлена на втором заводе.

$P(H_1) = \dfrac{2}{3}$; $P(H_2) = \dfrac{1}{3}$. $P(A/H_1) = 0{,}04$; $P(A/H_2) = 0{,}06$.

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}06 = \frac{7}{150}.$$

По формуле Байеса находим искомую вероятность

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}04}{\frac{7}{150}} = \frac{4}{7}.$$

<u>Образец 2-го контрольного задания с решениями</u>

1.Испытываются независимо 50 приборов. Вероятность выхода прибора из строя при испытании равна 0,02. Партия приборов принимается, если выйдет из строя не более одного прибора. Найти вероятность приема партии.

2.Два стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Составить закон распределения числа попаданий в мишень и вычислить числовые характеристики.

3.Дана плотность вероятности случайной величины *x*:

$$f(x) = \begin{cases} cx, \text{при } x \in [0,1] \\ c, \text{при } x \in (1,2) \\ 0, \text{при } x \notin [1,2] \end{cases}$$

Найти: c; F(x); M(x); D(x).

Решение задач образца 2-го контрольного задания

1. Испытания приборов укладываются в схему Бернулли.

Пусть x – число вышедших из строя приборов.

Искомая вероятность есть

$P(x \le 1) = P(x = 0) + P(x=1) = (1 - 0{,}02)^{50} + 50\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98^{49} \approx 0{,}74$.

Можно найти искомую вероятность с помощью формулы Пуассона, т.е. $P(x\le 1) = \dfrac{a^0\cdot e^{-a}}{0!} + \dfrac{a\cdot e^{-a}}{1!}$, где $a = n\cdot p = 50\cdot 0{,}02 = 1$.

$P(x\le 1) = (1 + a)\cdot e^{-a} = 2\cdot e^{-a} \approx 0{,}74$.

2. Пусть x – число попаданий в мишень, x может принимать значения 0, 1 и 2.

x принимает значение 0, если оба стрелка промахнутся; вероятность этого равна (1 – 0,6)(1 – 0,8) = 0,08;

x = 1, если один из стрелков промахнулся, вероятность такого исхода 0,6·0,2 + 0,4·0,8 = 0,44;

x = 2, если оба стрелка попадут в мишень, что может произойти с вероятностью 0,6·0,8 = 0,48.

Составим таблицу распределения:

x_i	0	1	2
P_i	0,08	0,44	0,48

M(x) = 0·0,08 + 1·0,44 + 2·0,48 = 1,4.
D(x) = 0,5.

3. Условие для нахождения c есть равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} cxdx + \int\limits_{1}^{2} cdx + \int\limits_{2}^{+\infty} 0dx = \frac{3}{2}c.$$

Отсюда $\frac{3}{2}c = 1$, c = $\frac{2}{3}^2$.

F(x) = $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Тогда F(x) = $\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^2}{3}, 0 \prec x \le 1 \\ \frac{2x-1}{3}, 1 \prec x \le 2 \\ 1, x \succ 2. \end{cases}$

M(x) = $\int x \cdot f(x)dx = \frac{11}{9}$.

D(x) = M(x^2) – M^2(x) = $\frac{22}{30}$;.

Тест для контроля знаний студентов по курсу теории вероятностей

1. Из цифр 3, 4, 5, 6 можно образовать различных трёхзначных чисел:

   1) 4; 2) 8; 3) 24; 4) 64.

2. В урне находятся 20 шаров, 5 из которых — синие. Из урны извлекают два шара. Вероятность того, что оба они синие, равна…

   1) $\frac{1}{19}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) x_1, x_2, x_3.

3. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелка равны 0,7 и 0,4 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок равна…

   1) 0,4; 2) 0,11; 3) 0,82; 4) 0,72.

4. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из стоя элемента А или двух элементов В и С, которые выходят из стоя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3, 0,2 и 0,2. Вероятность разрыва электрической цепи равна…

   1) 0,7; 2) 0,325; 3) 0,012; 4) 0,425.

5. Детали изготовляются на двух станках. На первом станке — 40 %, на втором — 60%. Среди деталей, изготовленных на первом станке, брак составляет 2%, на втором 1,5%. Вероятность того, что взятая случайным образом деталь для контроля бракованная равна…

1) 0,017; 2) 0,035; 3) 0,983; 4) 0,48.

6. Готовность каждого прибора к работе оценивается вероятностью, равной $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что из 7 имеющихся одинаковых приборов готовы к работе ровно 4 равна…

   1) $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{1}{35}$; 3) $\frac{35}{128}$; 4) $\frac{35}{64}$.

7. Магазин получил 50 изделий. Вероятность наличия нестандартного изделия в этой партии равна 0,02. Тогда наиболее вероятное число нестандартных изделий в этой партии равно…

   1) 10; 2) 1; 3) 3; 4) 2.

8. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Для вычисления вероятности того, что из взятых на проверку 600 изделий, 530 будут первого сорта, следует использовать…

   1) Формулу Пуассона;
   2) Формулу полной вероятности;
   3) Локальную теорему Муавра-Лапласа;
   4) Интегральную теорему Муавра-Лапласа.

9. Допишите правую часть неравенства

   $P(|x - m_k| < \varepsilon) \geq \ldots$

10. Дан закон распределения дискретной случайной величины x:

x	1	3	5
P	0,1	0,3	*a*

Тогда значения a равно…

1) 0,5; 2) 0,6; 3) 0,7; 4) 0,4.

11. Дан ряд распределения случайной величины x:

x	1	2	3
P	0,2	0,3	*0,5*

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно… 1) 0,9; 2) 1; 3) 1; 4)2,3.

12. Случайная величина x — число выпадения двух очков при 60 бросаниях игральной кости. Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно…

    1) 30; 2) 20; 3) 10; 4) 6.

13. Случайная величина x принимает только два произвольных значения $x_1 = 5;\ x_2 = -5$. Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно…

1) 2,5; 2) -2,5; 3) 0; 4) 5.

14. Дисперсия каждой из 3 одинаково распределенных и взаимно независимых случайных величин x_1, x_2, x_3 равна $\frac{1}{3}$. Тогда дисперсия среднего арифметического значения этих величин равна…

    1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{2}{3}$.

15. Случайная величина x распределена по закону Пуассона с параметром $a = 4$. Тогда среднее квадратическое отклонение этой случайной величины равно…

    1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

16. Непрерывная случайная величина x распределена равномерно в интервале (3;8). Тогда дисперсия этой случайной величины равна…

    1) $\frac{25}{12}$; 2) $\frac{25}{24}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{11}{12}$.

17. Случайная величина x подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m = 3$ и $\sigma = 2$. Тогда математическое ожидание случайной величины $y = 2x + 1$ равно…

    1) 7; 2) 5; 3) 9; 4) 11.

Примерные вопросы для проведения опроса

1. Доказательство теорем сложения вероятностей двух и трех совместных событий.
2. Вывод формулы полной вероятности. Вероятность появления хотя бы одного события (вывод).
3. Доказательство интегральной теоремы Лапласа.
4. Доказательство теоремы Пуассона.
5. Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли (вывод). Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
6. Доказательство свойств функции распределения. Доказательство свойств функции плотности вероятностей и ее вероятностный смысл.
7. Числовые характеристики основных законов распределения непрерывных случайных величин: равномерного, показательного и нормального (вывод).
8. Доказательство свойств функции распределения и функции плотности вероятностей двумерной случайной величины.
9. Доказательство леммы Маркова и неравенства Чебышева.
10. Доказательство теорем Чебышева и теоремы Бернулли.

Примеры задач для индивидуальных домашних заданий

Основные понятия классической теории вероятностей

Классическое определение вероятности

1. В урне тысяча лотерейных билетов с номерами от 1 до 1000. Найти вероятность того, что номер наудачу вынутого билета: а) четный; б) нечетный; в) <100; г) <1000.

Теоремы сложения и умножения

2. Три фирмы выполняют один и тот же заказ. Вероятность того, что первая фирма выполнит заказ в срок 0.75, вторая — 0.8, третья — 0.9, по отдельности. Определить вероятность того, что: а) одновременно первая и вторая выполнят заказ, а третья не успеет; б) все три одновременно не выполнят заказ в срок.

Применение комбинаторики

3. В клетке 30 попугаев: 20 говорящих и 10 неговорящих. Наудачу выбирают 4 попугая. Какова вероятность того, что среди них трое будут говорящих?

Полная вероятность. Повторение испытаний

Полная вероятность. Формула Байеса.

4. Вероятность того, что змея умрет в первом террариуме = 1/5, во втором террариуме = 1/7, в третьем террариуме = 1/4. Змею поместили в один из террариумов. Какова вероятность выжить?
5. В условиях предыдущей задачи змея умерла. Какова вероятность, что она умерла в третьем террариуме? Схема Бернулли.
6. 7% австралийцев — бушмены. Какова вероятность того, что среди 4 австралийцев будет хотя бы 1 бушмен?
7. 9% жителей Техаса — индейцы. Какова вероятность, что среди 1000 техасцев индейцев будет: а) 70, б) от 60 до 95.

Случайные величины

8. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	0,2	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

9. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ A\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + B, & 3 \le x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Найти A, B, σ, $P(2<X<7)$.

10. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти: 1) дифференциальную функцию распределения $f(x)$; 2) математическое ожидание $M(X)$; 3) дисперсию $D(X)$; 4) среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$; 5) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценивание степени освоения обучающимися дисциплины осуществляется на основе «Положение о балльно - рейтинговой системе оценки успеваемости студентов МГОУ», утвержденного решением Ученого совета МГОУ от 20 февраля 2012 года протокол №4.

Сопоставимость рейтинговых показателей студента по разным дисциплинам и балльно - рейтинговой системы оценки успеваемости студентов обеспечивается принятием единого механизма оценки знаний студентов, выраженного в баллах, согласно которому 100 баллов — это полное усвоение знаний по учебной дисциплине, соответствующее требованиям учебной программы.

Максимальный результат, который может быть достигнут студентом по каждому из Блоков рейтинговой оценки—100 баллов.

Шкала соответствия рейтинговых оценок пятибалльным оценкам:

Оценка по пятибалльной системе		**Оценка по стобалльной системе**
5	**отлично**	**81-100**
4	**хорошо**	**61-80**
3	**удовлетворительно**	**41-60**
2	**неудовлетворительно**	**0-40**

Ответ обучающегося на экзамене оценивается в баллах с учетом шкалы соответствия рейтинговых оценок пятибалльным оценкам.

В зачетную книжку выставляются рейтинговые оценки в баллах.

При получении студентом на зачете неудовлетворительной оценки в ведомость выставляется рейтинговая оценка в баллах (< 40 баллов), соответствующая фактическим знаниям (ответу) студента.

Процедура оценивания знаний и умений состоит из следующих составных элементов:

1) Учет посещаемости лекционных и практических занятий осуществляется по ведомости представленной ниже в форме таблицы.

Таблица1

№ п/п	Фамилия И.О.	Посещение занятий								Итого %
		1	2	3	4			…………………	9	
1.										
2.										

2) Выполнение домашних заданий

3) Текущий контроль

Экзамен выставляется в соответствии с предложенной ниже таблицей 2.

Таблица 2

№ п/п	Фамилия И.О.	Сумма баллов, набранных в семестре						Экзамен (до 40 баллов)	Подпись препод.
		Посещение (до 10 баллов)	Домашние задания (до 10 баллов)	Опросы (до 10 баллов)	Контрольная работа №1 (до 10 баллов)	Контрольная работа №2 (до 10 баллов)	Тест (до 10 баллов)		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1.									
2.									